Introdução à Geometria Analítica e Álgebra Linear

Aula 2: Inversão de Matrizes e Determinantes

Docente: Fábio Cop Ferreira[1] e William R. P. Conti[2]

DCMar - IMar - UNIFESP

1º trimestre de 2016

[1]e-mail: fabiocferreira@gmail.com
[2]e-mail: wrpconti@gmail.com

Sumário desta Aula

Definição de Matriz Inversa

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz quadrada $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n,$$

em que I_n denota a matriz unidade de ordem n. A matriz B é chamada de **inversa de** A. Se A não tem inversa, dizemos que A é **não invertível** ou **singular**.

Exemplo. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é a inversa de A, pois $AB = BA = I_2$.

Unicidade da Inversa

Teorema

Se uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ possui inversa, então a inversa é única.

Demonstração. Suponhamos que B e C sejam inversas de A. Então,

$$AB = BA = I_n \qquad \text{e} \qquad AC = CA = I_n.$$

Assim,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

∎

Observação. A inversa de A, quando existe, é denotada por A^{-1}. Aqui, o índice superior -1 **não** tem significado de potência, tão pouco de divisão!

Quatro Propriedades

Teorema

(a) *Se* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *é invertível, então* A^{-1} *também o é e*

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

(b) *Se* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ *são matrizes invertíveis, então* AB *é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

(c) *Se* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *é invertível, então* A^T *também é invertível e*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

(d) *Sejam* $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{n\times n}$. *Então* $AB = I_n$ *implica* $BA = I_n$.

Observação. Lembre-se que o produto de matrizes, em geral, não é comutativo: $AB \neq BA$.

Caracterização

O seguinte teorema caracteriza as matrizes invertíveis:

Teorema

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *A matriz A é invertível.*

(ii) *Existe uma matriz $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ tal que $BA = I_n$.*

(iii) *A matriz A é equivalente por linhas à matriz unidade I_n.*

Uma conseqüência imediata desse resultado é o seguinte:

Teorema (Equivalência à Matriz Unidade)

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é invertível se, e somente se, A é equivalente por linhas à matriz unidade I_n.

voltar

Isso significa que se A é invertível, através de um escalonamento (operações elementares) é possível transformá-la na matriz unidade.

Algoritmo para o Cálculo da Matriz Inversa

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, queremos calcular A^{-1} quando existir.

Estamos à procura de uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_2$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação matricial mostrada no lado esquerdo da igualdade, acabamos com as seguintes igualdades:

$$S_1 \begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}.$$

Caímos assim em dois sistemas lineares, cujas incógnitas são x, y, z, w. Suas matrizes aumentadas são, respectivamente,

$$M_1 = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad M_2 = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 1 \end{array}\right].$$

Como o lado esquerdo de M_1 e M_2 são iguais, vamos juntá-las em uma única matriz aumentada M, de modo então que fazer os escalonamento dessa nova matriz corresponde a fazer o escalonamento simultâneo de M_1 e M_2. A saber,

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Escalonando a matriz M, chegaremos à solução do sistema quando o lado esquerdo for igual à matriz unidade; quando isso ocorre, do lado direito aparece a solução do sistema, que é A^{-1}:

$$[A|I_n] \xrightarrow{\text{escalonamento}} \left[I_n|A^{-1}\right].$$

Exemplo Detalhado 1

Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução. Pela discussão acima, devemos escalonar a matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Faça a operação elementar $L_1 \to L_1 - L_2$; isso nos leva a

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Agora faça $L_2 \to L_2 - 2L_1$, de modo que temos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Por fim, para que o lado esquerdo seja igual à matriz unidade, faça $L_1 \to L_1 - 2L_2$, levando-nos a

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exemplo Detalhado 2

Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Devemos escalonar a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Faça as operações elementares $L_2 \to L_2 - 2L_1$ e $L_3 \to L_3 - L_1$; assim procedendo,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Faça $L_1 \to L_1 - L_2$ e $L_3 \to L_3 + 3L_2$, que resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Exemplo Detalhado 2

Agora, fazendo $L_3 \to -L_3$, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right].$$

Por fim, fazendo $L_1 \to L_1 - 2L_3$, chegamos a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right].$$

Portanto, após todo o processo de escalonamento, concluímos que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Exemplo Detalhado 3

Calcule a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Devemos escalonar a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Faça $L_2 \to L_2 - L_1$, de maneira que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_2 \to -L_2$, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Exemplo Detalhado 3

Agora, fazendo $L_3 \to L_3 - L_2$, caímos em

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Note que todas as entradas da última linha do lado esquerdo foram anuladas... O lado esquerdo da matriz não pode ser transformado (por operações elementares) na matriz unidade, ou, a matriz A não é equivalente por linhas à matriz unidade. Nesse caso, pelo Teorema “Equivalência à Matriz Unidade”, A^{-1} não existe.

◂ enunciado do Teorema “Equivalência à Matriz Unidade”

Observação. A última linha da matriz aumentada nos mostra uma incoerência: para algum dos sistemas lineares por ela representados, tem-se que

$$0x + 0y + 0z = -1.$$

Trata-se, portanto, de um sistema impossível.

Conhecimento da Matriz Inversa e a Resolução de Sistemas Lineares

Se um sistema linear $AX = B$ tem *o número de equações igual ao número de incógnitas* (em outras palavras, A é uma matriz quadrada $n \times n$ com X, B matrizes $n \times 1$), então o conhecimento da inversa da matriz do sistema, A^{-1}, reduz o problema de resolver o sistema a simplesmente fazer um produto de matrizes, como diz o seguinte teorema:

Teorema (Resolução SEL)

Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) *O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso a solução é $X = A^{-1}B$;*

(b) *O sistema homogêneo $AX = O$, onde O denota a matriz zero, tem solução não trivial se, e somente se, A é singular (não invertível).*

voltar

Note que, se A é invertível, então podemos multiplicar o lado esquerdo de $AX = B$ por A^{-1}, resultando em

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad I_nX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B.$$

Exemplo de Aplicação do Teorema

Resolva o sistema $AX = B$ onde $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solução. Pelo Teorema "Equivalência à Matriz Unidade", uma matriz é invertível se, e somente se, ela é equivalente por linhas à matriz unidade. A fim de mostrar que A é invertível, devemos então proceder com o escalonamento da matriz

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Faça a operação elementar $L_1 \to -L_1$; isso nos leva a

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Faça $L_2 \to L_2 - 4L_1$, obtendo-se

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Agora faça $L_2 \to \frac{1}{10}L_2$; assim

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right].$$

Exemplo de Aplicação do Teorema

Por fim, para que o lado esquerdo seja igual à matriz unidade, faça $L_1 \to L_1 + 3L_2$, levando-nos a

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & | & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & | & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right].$$

Portanto A é invertível.

Segue do Teorema “Resolução SEL” que o sistema $AX = B$ tem uma única solução, a qual é dada por

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B \\ &= \frac{1}{10}\left[\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right] = \frac{1}{10}\left[\begin{array}{c} 19 \\ 23 \end{array}\right], \end{aligned}$$

ou ainda, $x_1 = \frac{19}{10}$ e $x_2 = \frac{23}{10}$.

Definição de Determinante

Denotaremos por $\det(A)$ o **determinante** da matriz A. Vamos à sua definição, que é um tanto elaborada. Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Então:

(i) Se $n = 1$, tem-se que $A = [a_{11}]$, e neste caso define-se $\det(A) = a_{11}$;

(ii) Se $n = 2$, tem-se que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, e neste caso define-se $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

(iii) Se $n \geq 2$, tem-se que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, e neste caso define-se

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) - \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}), \end{aligned} \tag{1}$$

onde A_{ij} é a matriz obtida de A pela eliminação da i-ésima linha e da j-ésima coluna. Essa última expressão é chamada de **desenvolvimento em cofatores em termos da 1ª linha**.

Definição de Determinante

A expressão (1) nos diz que para o cálculo do determinante de uma matriz $n \times n$ precisamos calcular n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$, ou seja, o tamanho das matrizes envolvidas no cálculo baixou de 1 unidade. Assim sendo, com o uso recursivo de (1) podemos ir baixando o tamanho das matrizes até chegarmos em matrizes 3×3, ou até mesmo matrizes 2×2, cujo determinante sabemos calcular facilmente (veja item (*ii*) acima).

Observação. Em (1) aparecem os elementos da primeira linha da matriz A, mas, na verdade, o $\det(A)$ pode ser escrito em termos de qualquer outra linha de A: escolha uma linha i qualquer dessa matriz; então

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Exemplo 1. $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2.$

Exemplo 2.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} &= 1.\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 1.\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 2.\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 1.(3.1 - 4.(-2)) - 1.(2.1 - 4.1) + 2.(2.(-2) - 3.1) \\ &= 11 + 2 - 14 = -1. \end{aligned}$$

Observação. Para matrizes 3×3, **e somente para elas**, existe a “regra de Sarrus”: sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

ela diz que

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Para o exemplo 2, $\det(A) = (1.3.1 + 2.(-2).2 + 1.1.4) - (2.3.1 + 4.(-2).1 + 1.1.2) = -1.$

Propriedades 1

Teorema

Sejam A, B matrizes $n \times n$.

(a) *Se A possui duas linhas iguais, então $\det(A) = 0$;*

(b) *O determinante do produto de A por B é igual ao produto dos seus determinantes:* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;

(c) *Os determinantes de A e de sua transposta A^T são iguais:* $\det(A) = \det(A^T)$.

Observação. Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, segundo o item (c) acima, segue que todas as propriedades que se referem a linhas são válidas com relação a colunas. Disso resulta que o desenvolvimento do determinante por cofatores também pode ser feito fixando-se uma coluna de A.

Exemplo de Aplicação do Teorema

Seja $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Mostre que se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Solução. Como A é invertível, então $AA^{-1} = I_n$. Aplicando-se o determinante em ambos os lados dessa igualdade e evocando o item (b) do último teorema, segue que

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n).$$

Como $\det(I_n) = 1$ (justificativa logo abaixo), segue o resultado enunciado.

Para mostrar que $\det(I_n) = 1$, basta utilizarmos a expansão em cofatores recursivamente, baixando a ordem das matrizes envolvidas até obtermos matrizes 2×2:

$$\begin{aligned}
\det(I_n) &= 1.\det(I_{n-1}) \\
&= 1.1.\det(I_{n-2}) \\
&= 1.1.1.\det(I_{n-3}) \\
&\ \ \vdots \\
&= 1.1.1.1\ldots 1.\det(I_2) = 1.
\end{aligned}$$

Propriedades 2

Partindo da definição de determinante é possível mostrar que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal. Adicionalmente a isso, existe um resultado que diz que toda matriz pode ser escalonada até uma matriz triangular. Então, dada uma matriz A, podemos escaloná-la até ela virar uma matriz triangular T, cujo determinante sabemos calcular. Pergunta: como relacionar o $\det(T)$ com o $\det(A)$? A resposta vem com o próximo teorema, que mostra como varia o determinante de uma matriz quando se aplica operações elementares sobre suas linhas:

Teorema

Sejam A, B matrizes $n \times n$.

(a) *Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então* $\det(B) = \alpha \det(A)$;

(b) *Se B resulta de A pela troca da posição de duas linhas $k \neq l$, então* $\det(B) = -\det(A)$;

(c) *Se B é obtida de A substituindo-se a linha l por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha k, $k \neq l$, então* $\det(B) = \det(A)$.

Exemplo Detalhado

Obtenha o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ transformando-a em uma matriz triangular.

Solução. Fazendo $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$, temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \qquad \det(A_1) = \det(A).$$

Em seguida, fazendo $L_3 \rightarrow L_3 - L_1$, temos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \qquad \det(A_2) = \det(A_1) = \det(A).$$

Exemplo Detalhado

Por fim, fazendo $L_3 \to L_3 + 3L_2$, temos

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \qquad \det(A_3) = \det(A_2) = \det(A).$$

Como A_3 é uma matriz triangular, seu determinante é simplesmente a multiplicação dos elementos da diagonal principal, ou seja,

$$\det(A_3) = 1.1.(-1) = -1.$$

Assim sendo, conclui-se que $\det(A) = -1$ (como já havíamos calculado!).

Caracterização

O teorema abaixo enunciado caracteriza em termos do determinante as matrizes invertíveis e os sistemas lineares homogêneos que possuem solução não trivial.

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

(a) *A matriz A é invertível se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

(b) *O sistema homogêneo $AX = O$ tem solução não trivial se, e somente se,* $\det(A) = 0$.

Pelo item (a) do Teorema "Resolução SEL" e pelo item (a) acima, segue o seguinte resultado:

◂ enunciado do Teorema "Resolução SEL"

Corolário

O sistema associado $AX = B$ tem solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. *Neste caso a solução é $X = A^{-1}B$.*

Exemplo 1 de Aplicação do Teorema

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(i) Determinar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que existe $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq O$ que satisfaz $AX = \lambda X$.

(ii) Para cada um dos valores de λ encontrados no item anterior, determinar todos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tais que $AX = \lambda X$.

Solução. (i) Sendo I_3 o elemento neutro do produto, temos que

$$AX = \lambda X \qquad \Leftrightarrow \qquad AX = \lambda I_3 X.$$

Subtraindo $\lambda I_3 X$ de ambos os lados, obtemos

$$AX - \lambda I_3 X = O \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda I_3)X = O.$$

Agora, segundo o último teorema enunciado, esse sistema homogêneo tem solução não trivial $(X \neq O)$ se, e somente se, $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

Dado que

$$\det(A-\lambda I_3)=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda-3),$$

temos que $\det(A-\lambda I_3)=0$ se, e somente se, $\lambda=2$ ou $\lambda=3$. Concluímos assim que somente para $\lambda=2$ e $\lambda=3$ existem vetores $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\neq O$ tais que $AX=\lambda X$.

(ii) Para $\lambda=2$ temos

$$(A-2I_3)X=O \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 2y+2z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right. ,$$

que tem por solução o conjunto dos $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Para $\lambda = 3$ temos

$$(A - 3I_3)X = O \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

que tem por solução o conjunto dos $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$, com $\gamma \in \mathbb{R}$.

Nota. Seja A uma matriz $n \times n$. Um número λ é chamado **autovalor** de A se existe um vetor *não nulo* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$AX = \lambda X. \tag{2}$$

Um vetor não nulo que satisfaça (2) é chamado de **autovetor** de A.

Exemplo 2 de Aplicação do Teorema

Considere o sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

Em termos matriciais ele é escrito como $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Pelo corolário do teorema, esse sistema tem solução única se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Mas

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc \neq 0.$$

Satisfeita essa condição, o corolário ainda diz que a solução é dada por $X = A^{-1}B$. Precisamos agora obter uma expressão para A^{-1}, e para tanto utilizaremos o algoritmo que aprendemos nesta aula: devemos escalonar a matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

até que a matriz do lado esquerdo seja igual à matriz unidade I_2. Então, fazendo $L_1 \to \frac{1}{a}L_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & b/a & | & 1/a & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $L_2 \to L_2 - cL_1$, temos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & (ad-bc)/a & -c/a & 1 \end{array}\right].$$

Note que $ad - bc = \det(A)$. Fazendo agora $L_2 \to \frac{a}{\det(A)} L_2$, obtem-se

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -c/\det(A) & a/\det(A) \end{array}\right].$$

Por fim, para que o lado esquerdo seja igual à matriz unidade, faça $L_1 \to L_1 - \frac{b}{a} L_2$, levando-nos a

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a}\left(1 + bc/\det(A)\right) & -b/\det(A) \\ 0 & 1 & -c/\det(A) & a/\det(A) \end{array}\right].$$

Mostramos, portanto, que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}\left(1 + bc/\det(A)\right) & -b/\det(A) \\ -c/\det(A) & a/\det(A) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

onde na última igualdade notamos que $1 + bc/\det(A) = ad/\det(A)$ (haja vista que $\det(A) = ad - bc$) e depois que $1/\det(A)$ é fator comum a todas as entradas, colocando-o assim como um fator multiplicativo fora da matriz (lembre-se da propriedade de multiplicação de uma matriz por um escalar).

Com a expressão de A^{-1} em mãos, podemos voltar à igualdade $X = A^{-1}B$ e escrever explicitamente o vetor X:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d\alpha - b\beta \\ -c\alpha + a\beta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} \det\begin{bmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{bmatrix} \\ \det\begin{bmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$x = \frac{1}{\det(A)}\det\begin{bmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\det(A)}\det\begin{bmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{bmatrix}.$$

Essa é a tão chamada **Regra de Cramer** para sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.

Nota. Pode-se mostrar que para sistemas de n equações e n incógnitas a Regra de Cramer é escrita da seguinte maneira: se o sistema linear $AX = B$ é tal que a matriz A é $n \times n$ e invertível, então a solução do sistema é dada por

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

onde A_j denota a matriz que se obtém de A substituindo-se a sua j-ésima coluna pela matriz B.

Referências

[1] Reginaldo J. Santos, “Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear”. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2012.

[2] Serge Lang, “Linear Algebra”. Springer Verlag, New York, 3ª edição, 1987.