



Funções de Uma Variável II

Integrais

Integrais

- Integral definida
- Definição analítica
- Propriedades
- Teorema fundamental do cálculo

Definições

- Nova notação

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

- $f(x)$ deve ser contínua no intervalo $a < x < b$
- O limite tem que existir

n = número de retângulos

Integral Definida

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

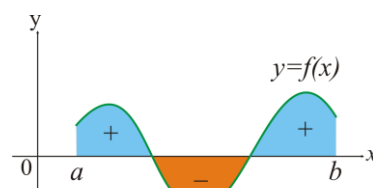
- A não depende de x

Integral Definida

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(r) dr$$

- A não depende da variável de integração

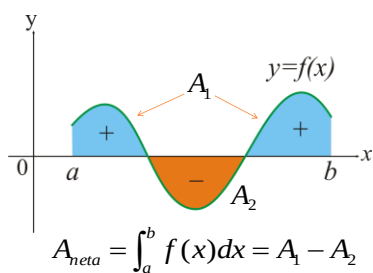
Integral Definida



$$A_{\text{neta}} = \int_a^b f(x) dx$$

Soma de áreas

Integral Definida



Soma de áreas

Integral Definida

- Se f for integrável em $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad x_i = a + i\Delta x$$

Teorema

Exercício

- Expresse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i^3 + x_i \sin x_i) \Delta x$$

Como uma integral no intervalo $[0, \pi]$

Integral Definida – Exemplo I

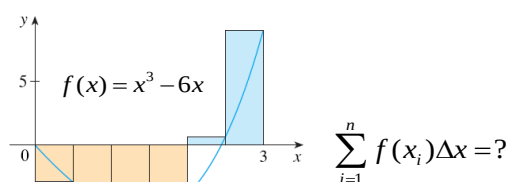
- Calcule usando somas de Riemann (utilizando áreas de retângulos) sobre as extremidades direitas para $f(x)=x^3-6x$, no intervalo: $a=0$ até $b=3$ com $n=6$.

- Avalie para n tendendo a infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x =$$

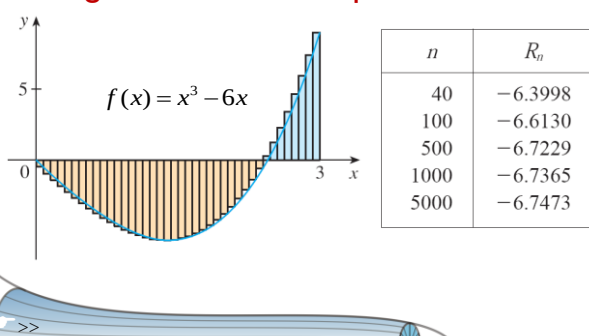


Integral Definida – Exemplo I



>>>utilizando o teorema

Integral Definida – Exemplo I



Integral Definida – Exemplo 2

- Escreva uma expressão para

$$\int_2^5 x^4 dx$$

como um limite de somas:

Integral Definida – Exercícios

- Calcule as integrais a seguir interpretando cada uma em termos de áreas.

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int_0^3 (x-1) dx$

Propriedades da integral definida

- $a < b$

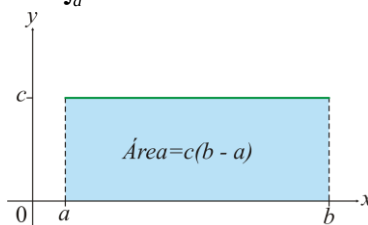
$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

- Se $b=a$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Propriedades da integral definida

1) $\int_a^b c dx = c(b-a)$



$c = \text{constante qualquer}$

Propriedades da integral definida

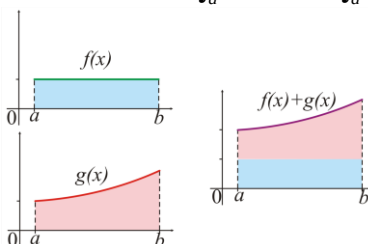
1) $\int_a^b c dx = c(b-a)$

2) $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$

$c = \text{constante qualquer}$

Propriedades da integral definida

3) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$



$c = \text{constante qualquer}$

Propriedades da integral definida

- 1) $\int_a^b c \, dx = c(b-a)$
- 2) $\int_a^b c f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$
- 3) $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$
- 4) $\int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$

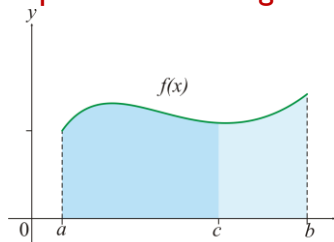
$c = \text{constante qualquer}$

Exercício

- Usando as propriedades das integrais, avaliar:

$$\int_0^1 (4 + 3x^2) \, dx =$$

Propriedades da integral definida



- Combinando integrais da mesma função em intervalos adjacentes:

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

Exemplo 4

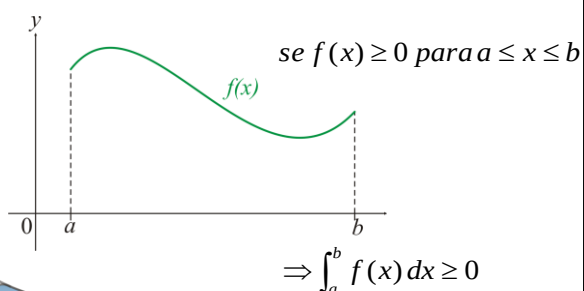
- Sabendo que:

$$\int_0^{10} f(x) \, dx = 17 \quad \int_0^8 f(x) \, dx = 12$$

- Encontrar:

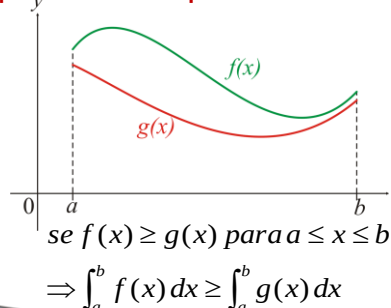
$$\int_8^{10} f(x) \, dx =$$

Propriedades comparativas da integral



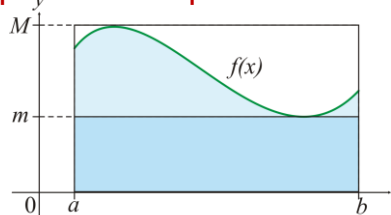
Se f positiva área positiva

Propriedades comparativas da integral



Comparando duas funções

Propriedades comparativas da integral



$$m \leq f(x) \leq M \text{ para } a \leq x \leq b$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Máximos e mínimos absolutos na região

Exemplo 5

- Utilize a propriedade do máximo e mínimo absoluto para estimar:

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx =$$



Teorema Fundamental do Cálculo

- Sendo f uma função contínua em $[a, b]$.

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = f(x)$$

- O TFC dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral

TFC – Exemplo 6

- Encontre a derivada da função:

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$$

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

> diretamente utilizando o TFC

Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

$$\text{com } F' = f$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- Relaciona derivadas com Integrais

O foco é encontrar o $F(x)$

Definições

Derivada

$$\frac{d}{dx}(x^3) =$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Integral

$$\int 3x^2 dx =$$

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

> Derivando e integrando para ver que são inversas

TFC – Exemplo 7

- Calcular

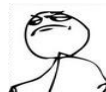
$$\int_{-2}^1 x^3 dx =$$

TFC – Exemplo 8

- Encontrar a área sob a curva $y=x^2$ de 0 a 1

$$A = \int_0^1 x^2 dx$$

>> Já fizemos isto de várias formas



TFC – Exemplo 9

- Encontrar a área sob a função trigonométrica $\cos(x)$ na região $[0, b]$

TFC – Exemplo 10

- Calcule:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx =$$

>> Muita observação...

Teorema Fundamental do Cálculo

- Integral e Derivada:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Outra forma

Tabela de integrais indefinidas

$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$	$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
$\int k dx = kx + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

Similar as definidas

Integral Indefinida

$$\int (x^3 + 5x^2 - x + 7) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 7x + C$$

Exemplo 11

$$\int (10x^4 - 2\sec^2(x)) dx =$$

>> propriedades diretas

Exemplo 12

$$\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta =$$

>> separando em duas partes

Exemplo 13

$$\int_0^3 (x^3 - 6x) dx =$$

Exemplo 14

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2} dt =$$

>> propriedades de frações

Técnicas de integração

- Se $u=g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I , então:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Objetivo: Simplificar funções compostas



Técnicas de integração – Exemplo 15

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx =$$

- Regra da Substituição

>> procure função dentro de função

Técnicas de integração – Exemplo 16

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx =$$

- Substituição

>> função composta?

Técnicas de integração – Exemplo 17

- Encontre:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx =$$

>> Composta?

Técnicas de integração – Exemplo 18

- Calcule:

$$\int e^{5x} dx =$$

> Rpta= $(1/5)e^{5x}+C$

Técnicas de integração – Exemplo 19

- Encontre:

$$\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx =$$

Técnicas de integração – Exemplo 20

- Calcule:

$$\int \operatorname{tg}(x) dx =$$

Exercício

- Integrais definidas

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx =$$

>>

Exercício

- Calcule:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} =$$

>>> Rpta=1/14

Exercício

- Calcule:

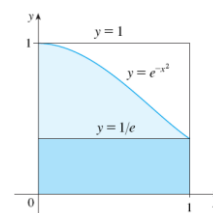
$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx =$$

>>> Rpta=1/2

Exercício

- Utilize a propriedade do máximo e mínimo absoluto para estimar:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx =$$



> 0,367 < Rpta < 1

Exercício

- Utilize o TFC para calcular as seguintes integrais:

$$\int_1^3 e^x dx =$$

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} =$$

> Rpta= $e^3 - e$ Rpta= $\ln 2$ **Exercício**

- Calcule:

$$\int \sqrt{2x+1} dx =$$

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx =$$

>> Rpta= $(1/3)(2x+1)^{3/2} + C$ Rpta= $-4 + 3\lg^{-1} 2$