Integral Definida

Vimos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

aparece quando calculamos uma área

2 Definição de Integral Definida Se f é uma função contínua definida em $a \leqslant x \leqslant b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0\,(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\,(= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ **pontos amostrais arbitrários** nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x}$$

Soma de Riemann

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

Integral Definida

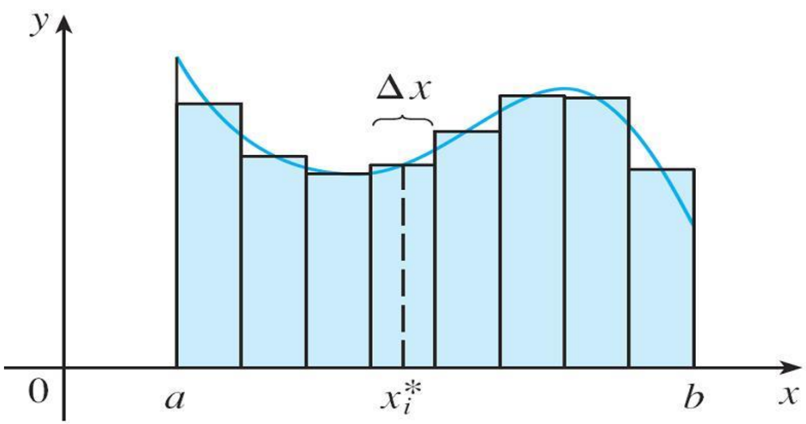
$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}} dx$$

a Limite inferior de integração

b Limite superior de integração

Integral Definida

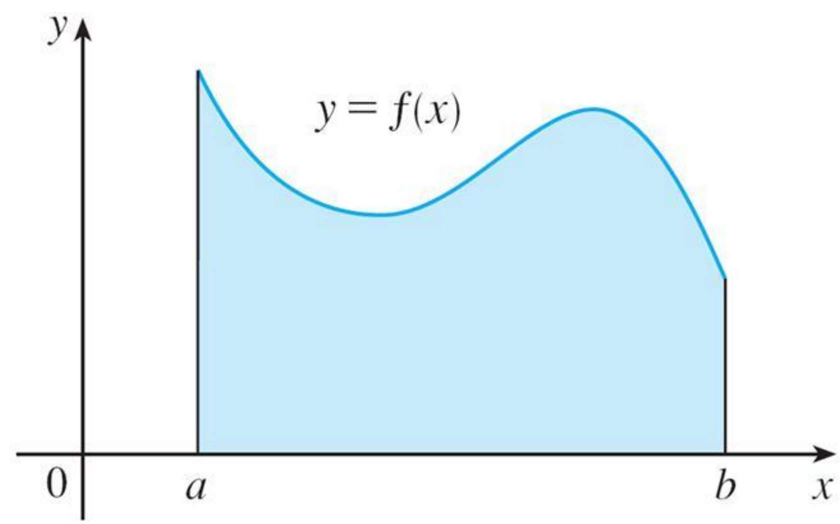
Se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas de retângulos aproximantes (veja a Figura 1).



Se $f(x) \geq 0$, a soma de Riemann $\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ é a soma de áreas de retângulos

Figura 1

Vemos que a integral definida pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b (veja a Figura 2.)

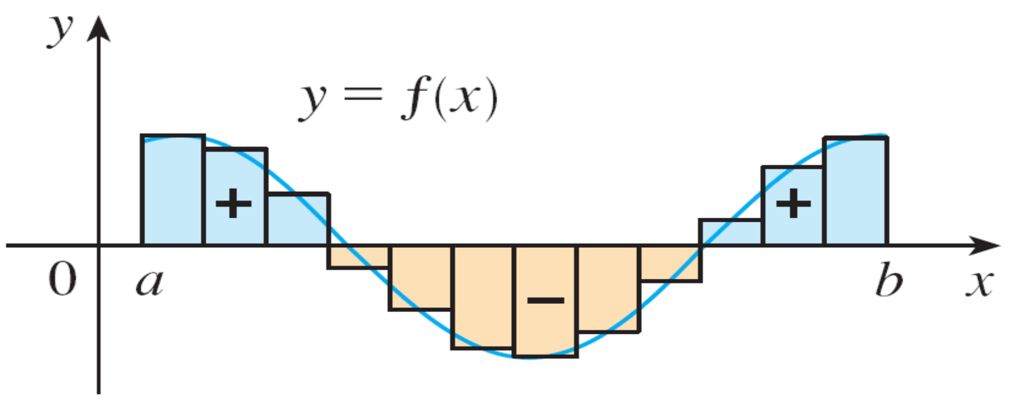


Se $f(x) \geq 0$, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b

Figura 2

Integral Definida

Se *f* assumir valores positivos e negativos, como na Figura 3, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima e abaixo do eixo *x.*



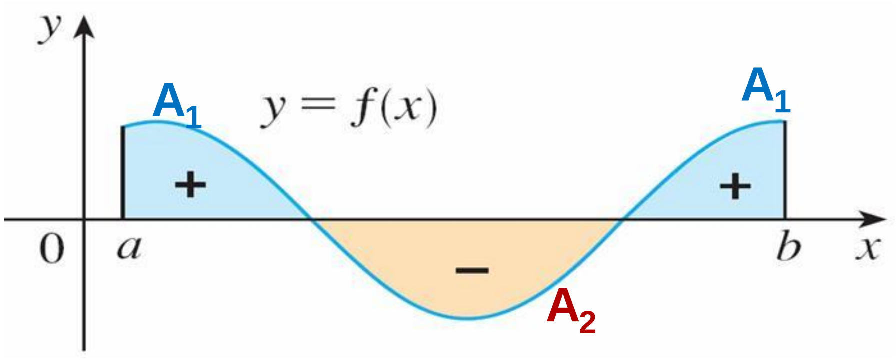
$\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ é uma aproximação para a área resultante

Figura 3

Integral Definida

Tomando o limite dessas somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na Figura 4. Uma integral definida pode ser interpretada como **área resultante**, isto é, a diferença das áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$



é a área resultante. $\int_a^b f(x)\,dx$

Figura 4

Integral Definida

Para simplificarmos o cálculo da integral, com frequência tomamos como pontos amostrais as extremidades direitas. Então, $x^* = x_i$ e a definição de integral se simplifica como a seguir.

$\boxed{4}$ **Teorema** Se f for integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i\,\Delta x$.

Integral Definida

Exemplo 1.

Expresse

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\, \Delta x$$

como uma integral no intervalo [0, π].

Integral Definida

Exemplo 2.

(a) Calcule a soma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas e $a = 0$, $b = 3$, e $n = 6$.

(b) Avalie $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

.

Integral Definida

Exemplo 3.

Calcule as integrais a seguir:

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$

(b) $\int_0^3 (x - 1)dx$

Integral Definida

A Regra do Ponto Médio

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

onde $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

e $$\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{ponto médio de } [x_{i-1}, x_i]$$

Integral Definida

Exemplo 4.

Use a Regra do Ponto Médio com *n* = 5 para aproximar

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

Integral Definida

Propriedades da Integral Definida

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Propriedades da Integral

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Integral Definida

Propriedades da Integral Definida

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Propriedades Comparativas da Integral

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).}$$

Útil quando queremos uma estimativa da integral

Integral Definida

Exemplo 5.

$f(x) = e^{-x^2}$ é uma função decrescente entre [0,1], seu valor máximo é M=f(0)=1 e seu mínimo absoluto é m=f(1)=e^{-1}

Teorema Fundamental do Cálculo

O nome Teorema Fundamental do Cálculo é apropriado, pois ele estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ele dá a relação inversa precisa entre a derivada e a integral.

A primeira parte do Teorema Fundamental lida com funções definidas por uma equação da forma

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

onde *f* é uma função contínua em [*a*, *b*] e *x* varia entre *a* e *b*. Observe que *g* depende somente de *x*, que aparece como o limite superior variável da integral.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se *x* for um número fixado, então a integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número definido. Se variamos *x* o número $\int_a^x f(t)\,dt$ também varia e define a função de *x* denotada por *g*(*x*).

Se *f* for uma função positiva, então *g*(*x*) pode ser interpretada como a área sob o gráfico de *f* de *a* até *x*, onde *x* pode variar de *a* até *b*. (Imagine *g* como a função "área até aqui"; veja a Figura 1.)

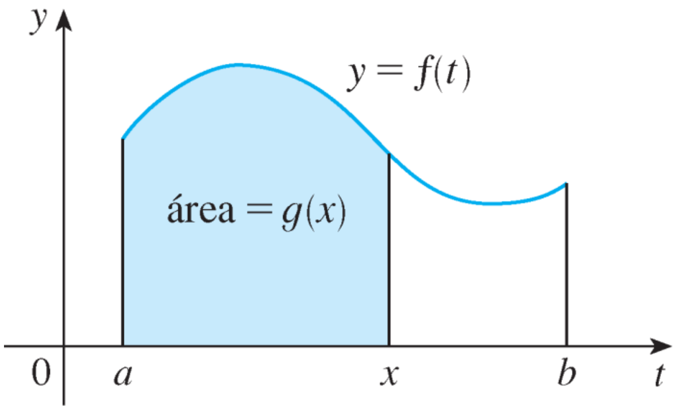


Figura 1

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo 6

Se *f* é a função cujo gráfico é mostrado na Figura 2 e $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encontre os valores de *g*(0), *g*(1), *g*(2), *g*(3), *g*(4) e *g*(5). A seguir, faça um esboço do gráfico de *g*.

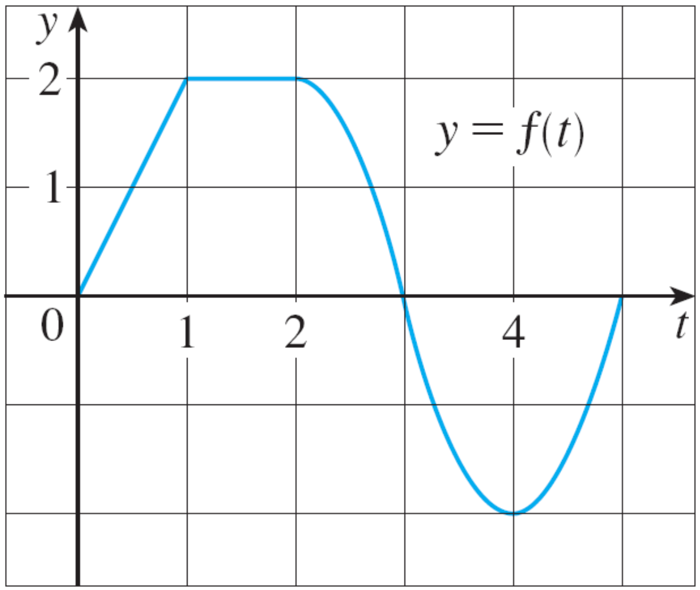
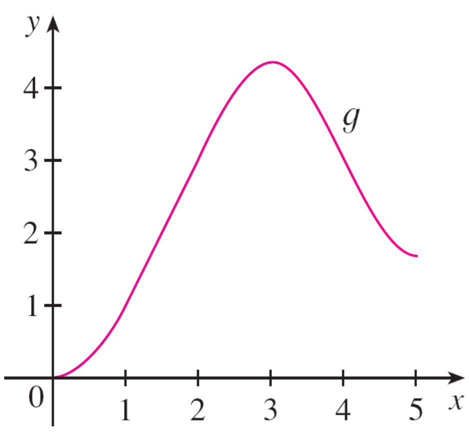


Figura 2



$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1 Se f for contínua em $[a, b]$, então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Usando a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever o TFC1 como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

quando *f* é contínua. Grosseiramente falando, a Equação acima nos diz que se primeiro integramos *f* e então derivamos o resultado, retornamos à função original *f*.

Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo 7

Encontre a derivada da função $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt.$

Uma vez que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ é contínua, Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

A segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo, que segue facilmente da primeira parte, nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais

Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2 Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Teorema Fundamental do Cálculo

Vamos finalizar esta seção justapondo as duas partes do Teorema Fundamental.

Teorema Fundamental do Cálculo Suponha que f seja contínua em $[a, b]$.

1. Se $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, então $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Observamos que a Parte 1 pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

o que quer dizer que se *f* for integrada e o resultado, derivado, obteremos de volta a função original *f*.

Teorema Fundamental do Cálculo

a Parte 2 pode ser reescrita como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Integrais Indefinidas

Em virtude da relação dada pelo Teorema Fundamental entre primitivas e integrais, a notação $\int f(x)dx$ é tradicionalmente usada para a primitiva de *f* e é chamada **integral indefinida.**

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x).}$$

podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2.$$

Portanto, podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor da constante *C*).

Integrais Indefinidas

Você deve fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida. Uma integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um *número*, enquanto uma integral indefinida $\int f(x)dx$ é uma *função* (ou uma família de funções). A conexão entre elas é dada pela Segunda Parte do Teorema Fundamental: se *f* é contínua em [*a*, *b*], então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

Integrais Indefinidas

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \text{tg}\,x + C \qquad \int \text{cossec}^2 x\,dx = -\text{cotg}\,x + C$$

$$\int \sec x\,\text{tg}\,x\,dx = \sec x + C \qquad \int \text{cossec}\,x\,\text{cotg}\,x\,dx = -x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \text{tg}^{-1}x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \text{sen}^{-1}x + C$$

$$\int \text{senh}\,x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \text{senh}\,x + C$$

Integrais Indefinidas

Exemplos

1. Encontre a integral indefinida geral para
$\int (10x^4 - 2sec^2 x)dx$

2. Calcule $\int \frac{cos\theta}{sen^2\theta} d\theta$

3. Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

4. Encontre $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right) dx$

Regra da Substituição

Suponha que queremos integrar: $\int 2x\sqrt{1+x^2 dx}$

Exemplos

1. Encontre $\int (x^3 \cos(x^4 + 2))dx$

2. Encontre $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

3. Calcule $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

4. Encontre $\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx$

5. Calcule $\int tgx\; dx$

Substituição na Integral Definida

Existem dois métodos para se calcular uma integral *definida* por substituição. Um deles consiste em calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental. Por exemplo,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4$$

$$= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em alterar os limites de integração ao mudar a variável.

6 Regra da Substituição para as Integrais Definidas Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Substituição na Integral Definida

Exemplos

1. Calcular $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$

2. Calcule $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

3. Calcule $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$