UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS BAIXADA SANTISTA

# Funções de uma variável – FUV 1
# Derivada

2017

# Funções Exponenciais

Vamos tentar calcular a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ usando a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

O fator $a^x$ não depende de $h$, logo podemos colocá-lo adiante do limite: $f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

Observe que o limite é o valor da derivada de $f$ em 0, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$ portanto $f'(x) = f'(0).a^x$

# Funções Exponenciais

para $a = 2$, $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}69,$

para $a = 3$, $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}10.$

| $h$ | $\frac{2^h - 1}{h}$ | $\frac{3^h - 1}{h}$ |
|---|---|---|
| 0,1 | 0,7177 | 1,1612 |
| 0,01 | 0,6956 | 1,1047 |
| 0,001 | 0,6934 | 1,0992 |
| 0,0001 | 0,6932 | 1,0987 |

5 $\quad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x, \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1{,}10)3^x.$

**Definição do Número *e***

$$e \text{ é um número tal que } \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

**Derivada da Função Exponencial Natural**

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

# Funções Exponenciais

$$y = a.\,e^{bx^m} \Rightarrow y' = m.a.b.x^{m-1}.e^{bx^m}$$

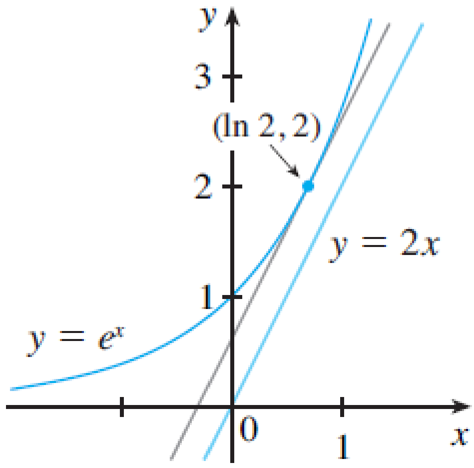
## Exemplo 1

Se $f(x) = e^x - x$, encontre $f'$ e $f''$.

# Funções Exponenciais

## Exemplo 2

Em que ponto da curva $y = e^x$ sua reta tangente é paralela à reta y=2x ?



# Funções Trigonométricas

**Derivadas de Funções Trigonométricas**

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cossec } x) = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \text{ tg } x$$

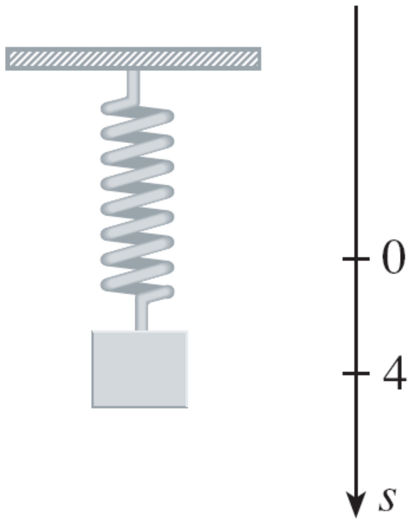
$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cossec}^2 x$$

# Funções Trigonométricas

## Exemplo 3

Um objeto na extremidade de uma mola vertical é esticado 4 cm além de sua posição no repouso e solto no tempo $t = 0$. (Veja a Figura e observe que o sentido positivo é para baixo). Sua posição no tempo $t$ é

$$s = f(t) = 4 \cos t,$$




Encontre a velocidade e a aceleração no tempo $t$ e use-as para analisar o movimento do objeto.

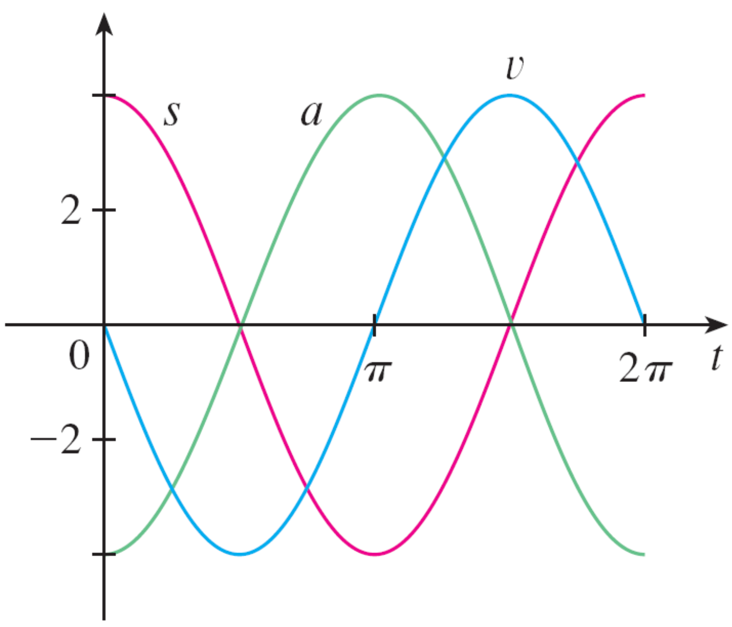
# Funções Trigonométricas

## Exemplo 3 - Solução

O objeto oscila desde o ponto mais baixo ($s$ = 4 cm) até o ponto mais alto ($s$ = – 4 cm). O período de oscilação é $2\pi$, o período de cos $t$.

A velocidade é | $v$ | = 4 | sen $t$ |, que é a máxima quando | sen $t$ | = 1, ou seja, quando cos $t$ = 0. Assim, o objeto move-se mais rapidamente quando passa por sua posição de equilíbrio ($s$ = 0). Sua velocidade escalar é 0 quando sen $t$ = 0, ou seja, no ponto mais alto e no mais baixo.

A aceleração $a$ = – 4 cos $t$ = 0 quando $s$ = 0. Ela tem seu maior módulo nos pontos mais altos e mais baixos. Veja os gráficos na Figura ao lado.



# Funções Trigonométricas

## Exemplos:

4. Derive:

a) $y = x^2 sen\, x$

b) $y = tg\, x$

c) $f(x) = \frac{\sec x}{1 + tg\, x}$

5. Encontre a 27ª. derivada de cos x

# Regra da Cadeia

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $F$ é uma função composta. Na realidade, se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então podemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$.

Sabemos como derivar ambas $f$ e $g$, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de $f$ e $g$. O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de $f$ e $g$.

# Regra da Cadeia

**A Regra da Cadeia** Se $g$ for derivável em $x$ e $f$ for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$ definida por $F(x) = f(g(x))$ é derivável em $x$ e $F'$ é dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

# Regra da Cadeia

## Exemplos:

6. Derive:

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = sen\,(x^2)$

c) $y = sen^2(x)$

**4** **A Regra da Potência Combinada com a Regra da Cadeia** Se $n$ for qualquer número real e $u = g(x)$ for derivável, então

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Alternativamente, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

# Regra da Cadeia

## Exemplos:

7. Derive:

a) $y = (x^3 - 1)^{100}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

c) $y = (\frac{t-2}{2t+1})^9$

d) $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$

e) $y = e^{\sin x}$

# Regra da Cadeia

Suponha que $y = f(u)$, $u = g(x)$ e $x = h(t)$, onde $f$, $g$ e $h$ são funções deriváveis. Então, para calcular a derivada de $y$ em relação a $t$, usamos duas vezes a Regra da Cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

## Exemplo 8

Derive:

$$f(x) = sen(\cos(tgx))$$

# Derivação Implícita

Algumas funções são definidas implicitamente por uma relação entre $x$ e $y$, tal como:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Em alguns casos é possível resolver tal equação isolando $y$ como uma função explícita (ou diversas funções) de $x$.

Por exemplo, se resolvermos a equação para $y$, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

logo, duas das funções determinadas pela equação implícita são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$.

# Derivação Implícita

Felizmente, não precisamos resolver uma equação para *y* em termos de *x* para encontrar a derivada de *y*. Em vez disso, podemos usar o método de **derivação implícita**.

Isso consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a *x* e, então, na resolução da equação para $y'$.

## Exemplo 9

a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$

b) Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, 4).

# Derivação Implícita

**Exemplo 10**

Determine a equação da tangente ao gráfico de

$f(x) = 4 – x^2$ no ponto (1,3)

# Outras derivadas

## Derivada do logaritmo natural

$$y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

## Derivada do logaritmo de x na base a

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \longrightarrow y' = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$$

## Derivada da Função exponencial

$$y = a.e^{bx^m} \longrightarrow y' = m.a.b.x^{m-1}.e^{bx^m}$$

# Outras derivadas

## Exemplos

11. Derive:

a) $y = ln(x^3 + 1)$

b) $y = ln(sen\ x)$

c) $y = \sqrt{\ln x}$

d) $y = log_{10}(2 + sen\ x)$

e) $y = ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$