UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS BAIXADA SANTISTA

Funções de uma variável – FUV 1
Aplicações de Derivada

2017

APLICAÇÕES DE DERIVADA

1 – Exemplo prático

Suponha que tenhamos uma placa quadrada de lado 3 m e desejamos construir um recipiente sem tampa

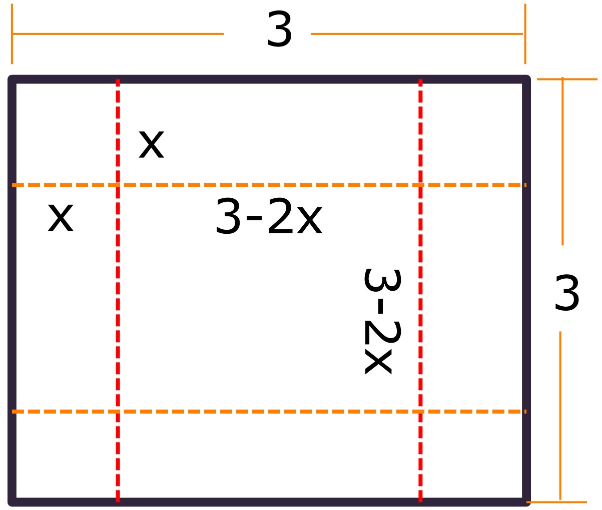


FIG 1. Vista da placa com o pedaços para cortar.

Pergunta???

Qual deve ser o tamanho do quadrado a ser cortado a fim de que a caixa tenha um volume máximo??

Observando a caixa da FIG.2, vemos que o seu volume é dado por:

$$V = (3 - 2x)^2 x \qquad \textbf{(I)}$$

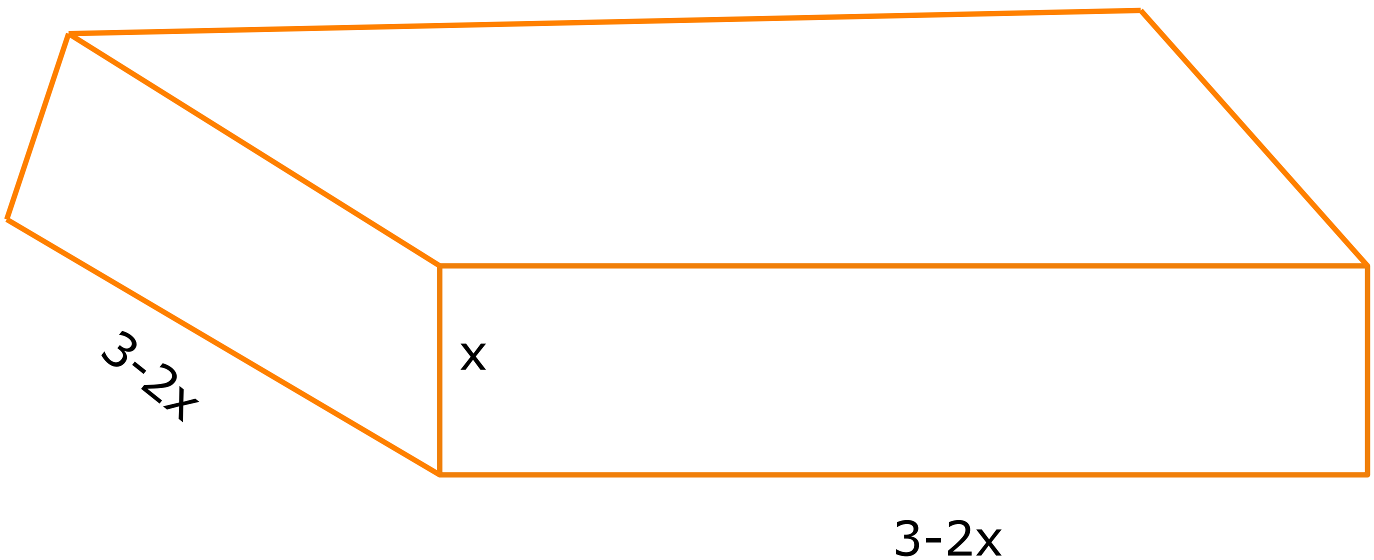


FIG 2. Formato do recipiente.

Nos pontos de máximo e mínimo a derivada é zero (pois a tangente à curva nesses pontos é paralela ao eixo dos x e, consequentemente, a inclinação dessas retas é zero.

Então o que devemos fazer é calcular a derivada da função dada por I, em relação a x, e igualar a zero.

$$\frac{dV}{dx} = 2(3-2x)(-2)x + (3-2x)^2$$

$$= (6-4x)(-2x) + 9 - 12x + 4x^2$$

$$= -12x + 8x^2 + 9 - 12x + 4x^2$$

$$= 12x^2 - 24x + 9$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

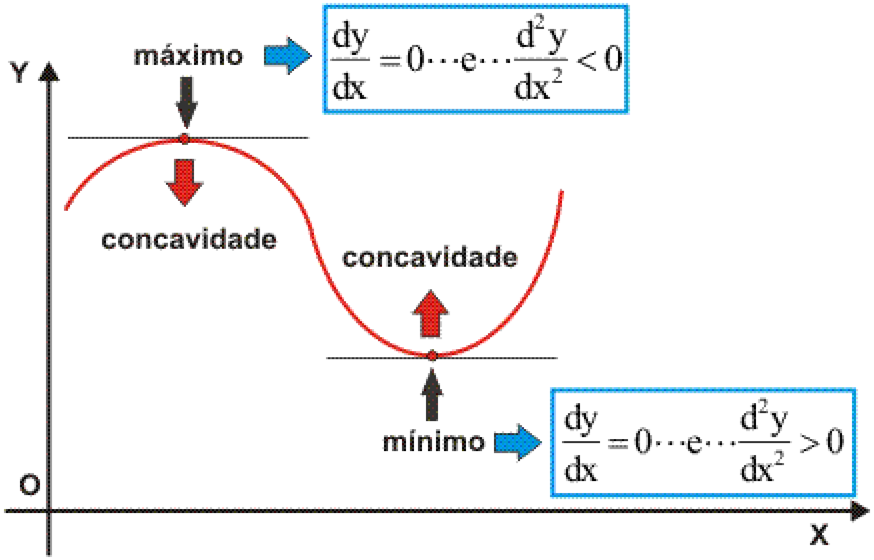
Resolvendo esta equação, encontramos dois valores para x : **x=1,5 m** e **x = 0,5 m**

O **primeiro** corresponde ao **mínimo** valor **de V**, pois como podemos ver, para **x = 1,5 m**, **V = 0**. Como **depois de um mínimo** só pode vir **um máximo** (funções contínuas), o valor que estamos procurando **é o segundo**.

Ou seja, o recipiente é um paralelepípedo de base quadrada de lado 2 m e altura 0,5 m.

O problema é...

Nem sempre é fácil identificar os máximos e os mínimos



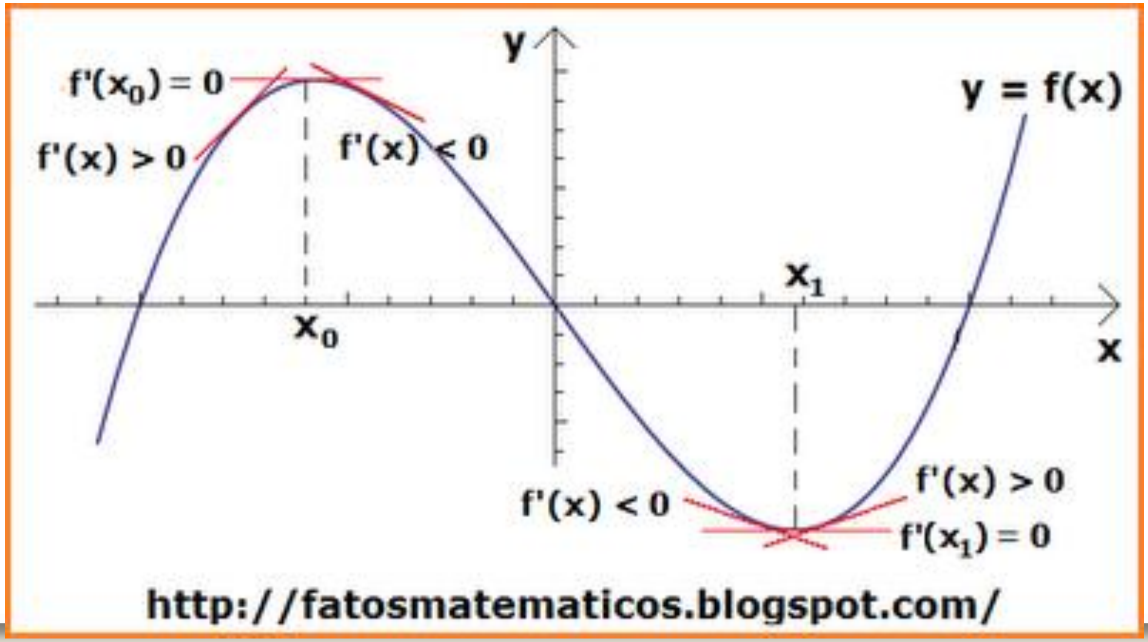


Gráfico – Explicação

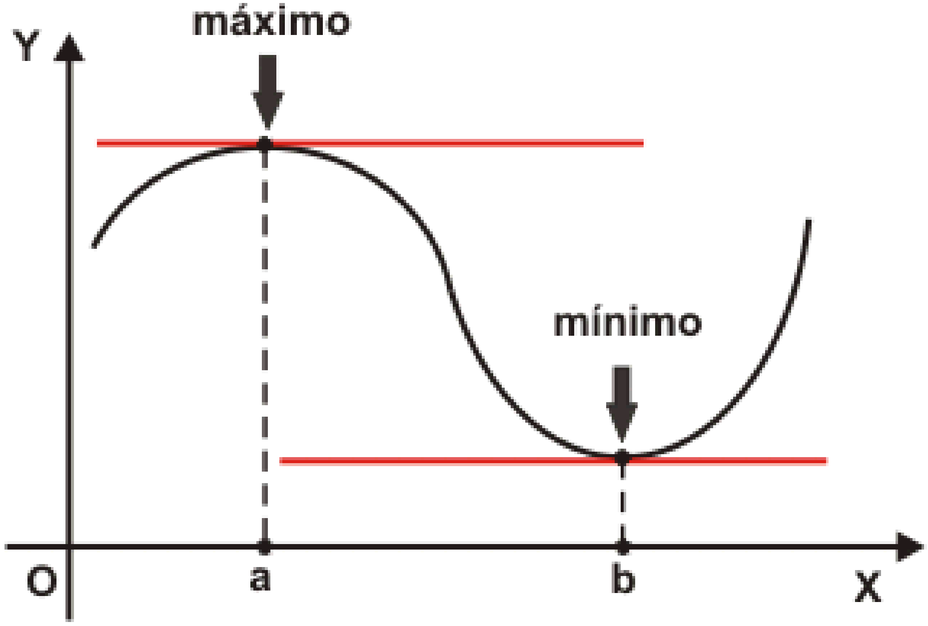
Tomemos a derivada segunda da função dada por (I) – Notação V'' ou d^2V/dx^2

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 8x - 8$$

De fato, para x = 0,5; V''= -4 < 0 e para x =1,5; V''= 4 > 0

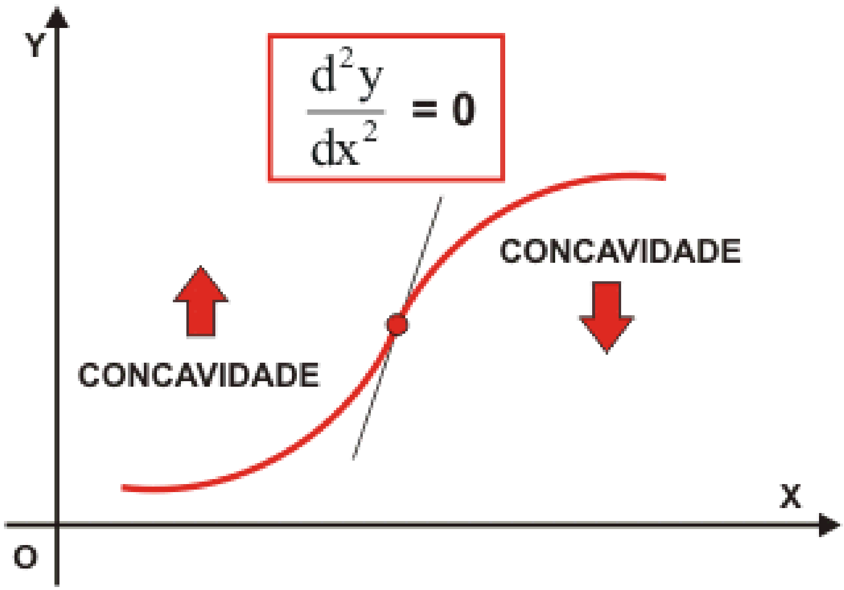
OBSERVAÇÕES

1 – Pontos de máximos e mínimos – derivada primeira é zero;

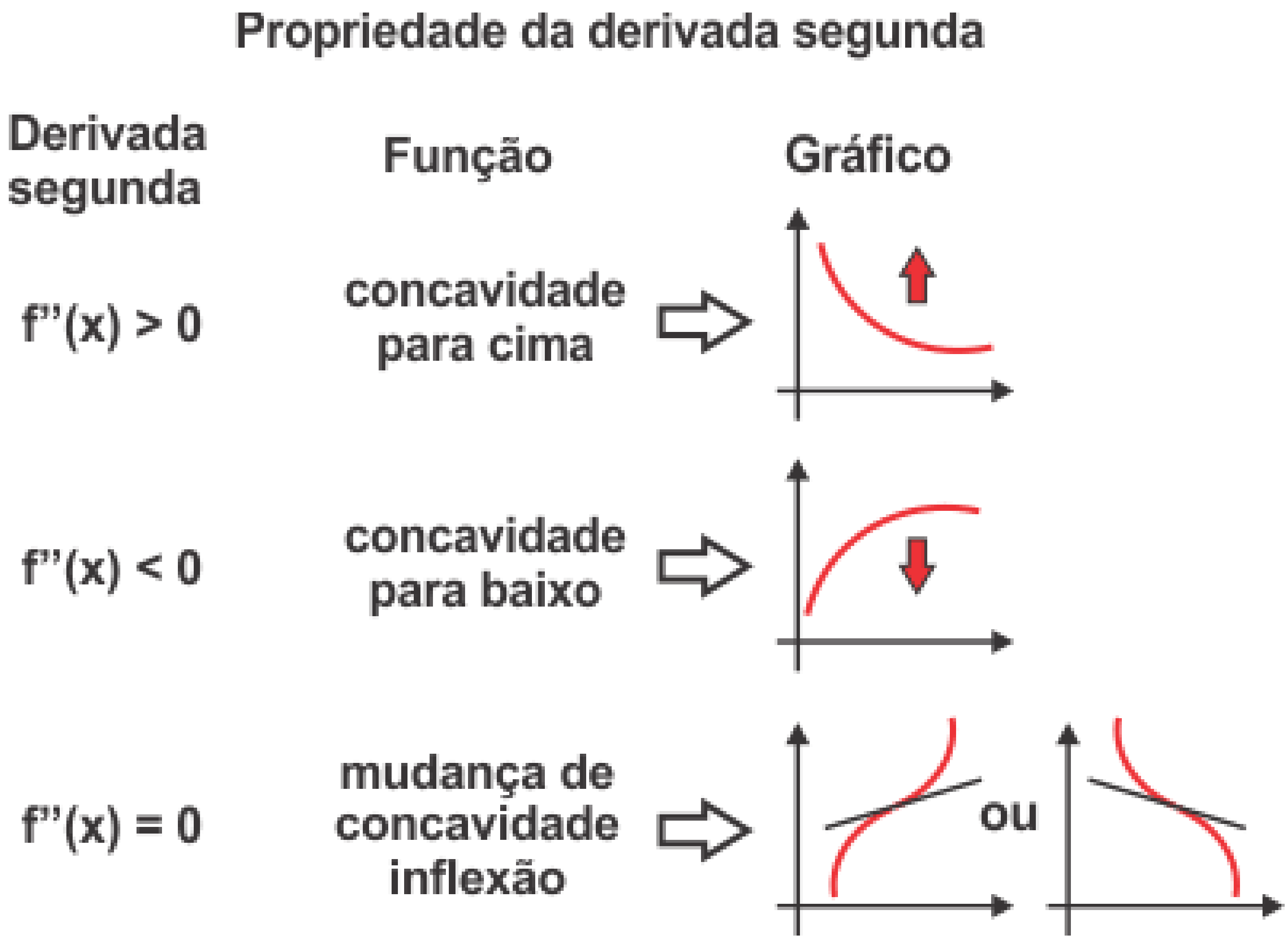


Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsm/ldt0304.htm

2- Pontos de Inflexão – pontos onde a curva muda de concavidade – ficam entre um máximo e um mínimo – a segunda derivada é zero.



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsm/ldt0304.htm



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsm/ldt0304.htm

2- Exemplo de Física Básica

Considere um projétil lançado do topo de um edifício de altura com velocidade inicial de módulo v0 e fazendo um ângulo θ com a horizontal.

Objetivos

Calcular o alcance A

Calcular o ângulo θ para que o alcance seja máximo

Considerando que o movimento dos corpos (não relativísticos nem quânticos) é regido pela segunda Lei de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (1)$$

Lembrando que $\vec{F}$ é a força resultante de todas as forças que atuam sobre o corpo. As demais quantidades são: m, massa do corpo e ,$\vec{a}$ aceleração definida por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} \qquad (2)$$

Onde $\vec{v}(t)$ e $\vec{s}(t)$ são a velocidade e posição do corpo no instante t.

Precisamos conhecer todas as forças atuantes sobre o corpo. Neste exemplo temos a força gravitacional (desprezamos o atrito com o ar), definida por:

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad (3)$$

Onde $\vec{g}$ é o campo gravitacional no ponto onde está o corpo. Nesse exemplo, movimento é próximo à superfície da Terra, e portanto, este valor pode ser tomado como constante, cujo módulo é próximo de 10 m/s^2. Considerando a orientação dos unitários na figura, temos que:

$$\vec{F} = -mg\hat{j} \qquad (4)$$

Combinando as equações das forças temos:

$$\frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = -g\hat{j} \qquad (5)$$

Como $\vec{s} = x\hat{i} + y\hat{j}$, a equação acima fornece duas relações :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

Temos acima duas equações em que as incógnitas são x e y. Como as variáveis aparecem dentro dos sinais de derivação, elas são chamadas de equações diferenciais. A solução, neste caso, é bem simples. Na primeira, temos que a variável x é algo que derivando duas vezes em relação a t dá zero.

Então, a solução geral só pode ser:

$$x = c_1 t + c_2 \qquad (6)$$

Analogamente:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c_4 \qquad (7)$$

Essas são soluções gerais – vamos agora adaptar essas soluções ao nosso problema

1º quando t=0, x e y são nulos, então, usando esta condição nas equações 6 e 7, percebemos que c2 e c4 tem de ser zero.

Analogamente derivando-se as equações, 6 e 7 em relação ao tempo, temos que:

$$c_1 = v_0 \cos\theta \qquad (8)$$

Componente horizontal da velocidade – é uma constante;

$$c_3 = v_0 \sin\theta \qquad (9)$$

Componente vertical da velocidade em t=0. Substituindo esses valores nas equações 6 e 7, obtemos:

$$x = (v_0 \cos\theta)t \qquad (10)$$

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (11)$$

Pela figura, vemos que x = A (alcance) quando y = -h. Substituindo esses resultados acima e eliminando o tempo entre as duas expressões, obtemos:

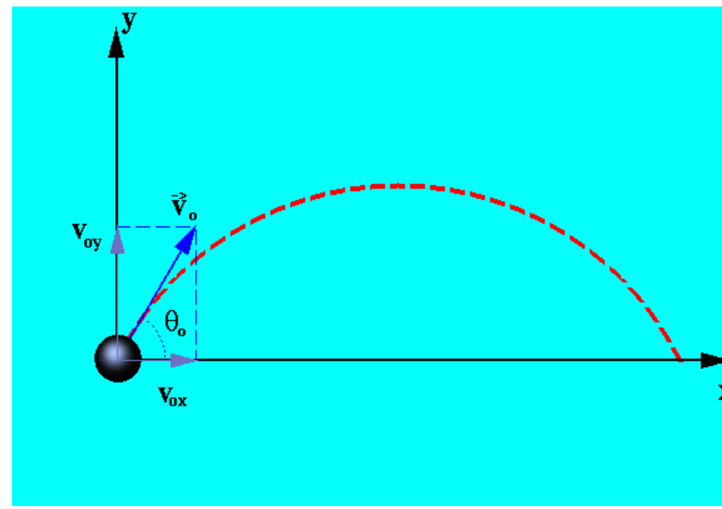
$$A = \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}\right) \quad (12)$$

Que é a expressão do alcance.

Observe que:

Para h = 0 (corpo lançado da superfície e não do topo do prédio), temos:

$$A = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$



$$A = \frac{v_0}{g} \sin 2\theta \qquad (13)$$

Somente neste caso, o alcance será máximo quando sen2θ for máximo, ou seja, igual a 1. Então $2\theta = 90^\circ$, então o alcance nesse caso será máximo, quando $\theta = 45^\circ$. Bem conhecido!!!!

Para o caso do corpo lançado de uma altura h, o alcance dado pela equação 12, será máximo quando...

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE QUALQUER FUNÇÃO

OU SEJA, CONDIÇÃO PARA QUE:

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 \qquad (14)$$

Derivando a equação 13 (exercício para vocês!!!)

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{gh}{v_0^2}\right) - \frac{1}{2}$$

Teorema do Valor Médio

Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses

a) f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$,

b) f é diferenciável no intervalo aberto (a, b),

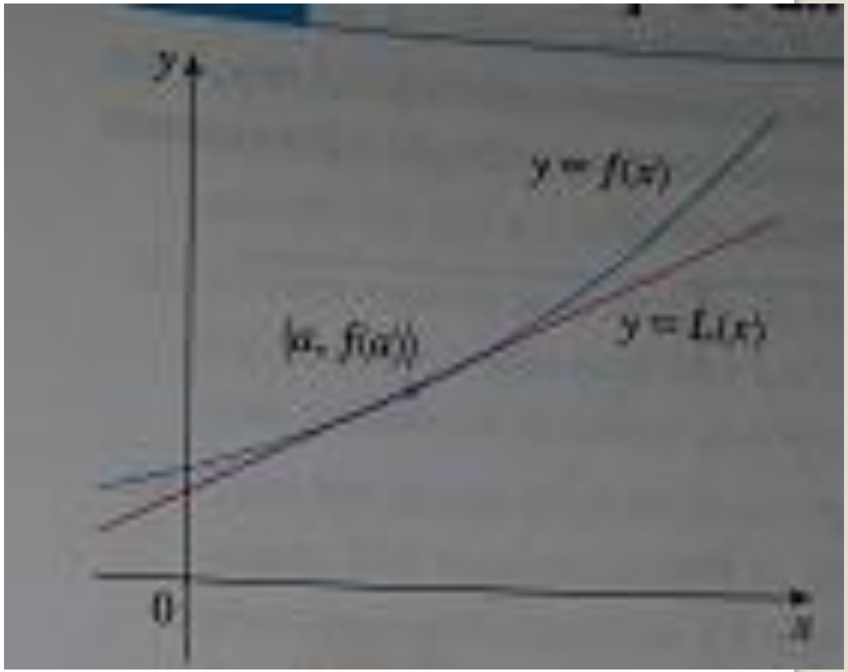
Então existe um número c em (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou

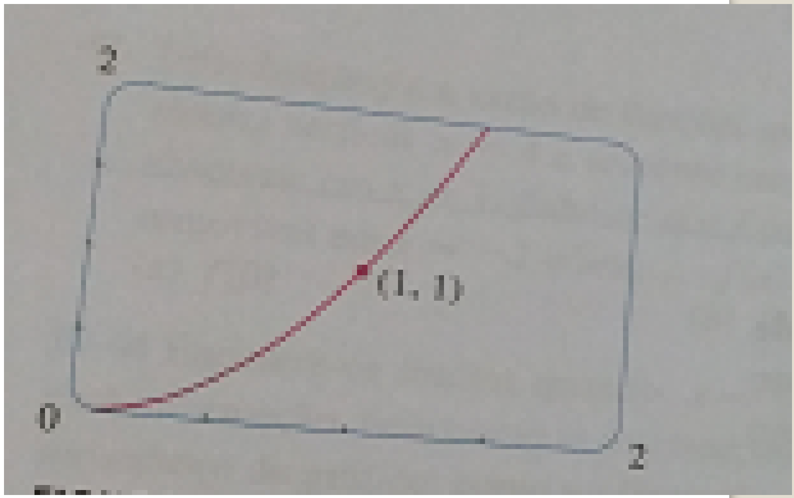
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

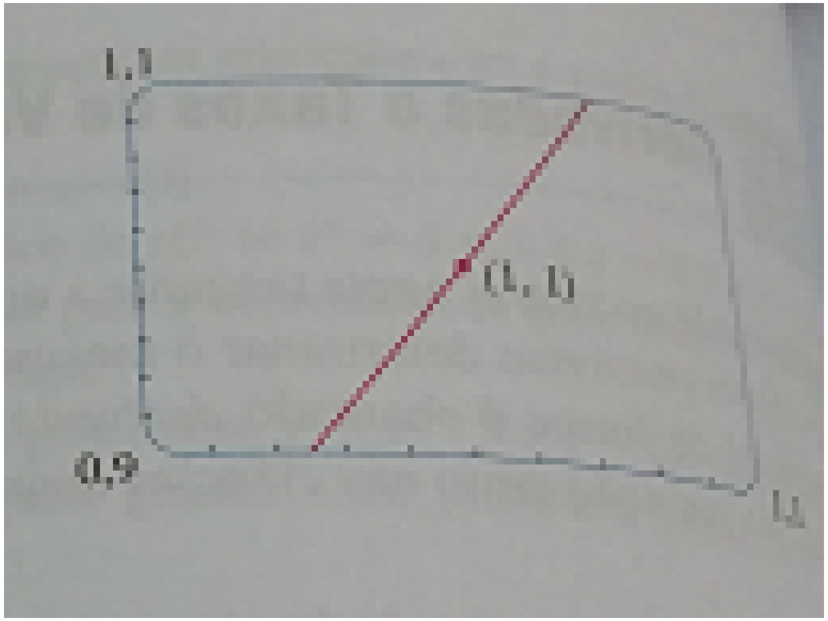
Aproximações Lineares e Diferenciais

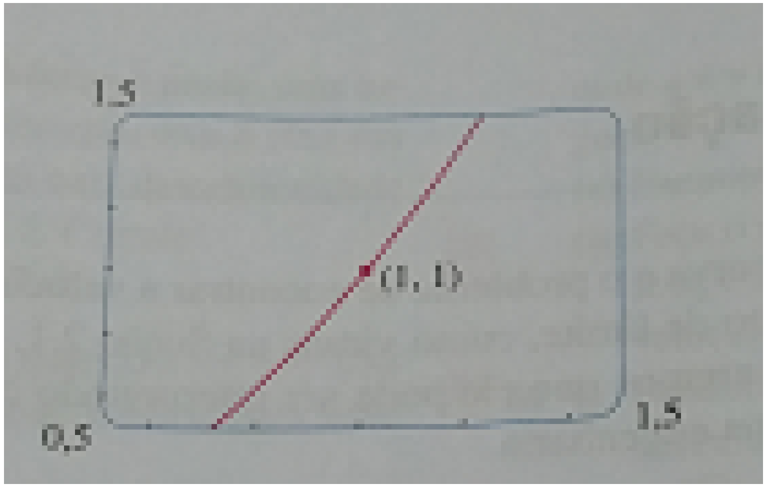


Vimos que uma curva fica muito próxima de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência

Usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de a







A equação dessa reta tangente:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

E a aproximação

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

É denominada aproximação linear ou aproximação pela reta tangente *f* em *a*.

A função linear cujo gráfico é essa reta tangente:

$$L(x) = f(a) + f'(a).(x - a)$$

É denominada **linearização** de *f* em *a*.

Exemplo

Encontre a linearização da função

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

Em $a = 1$ e use-as para aproximar os números $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$

Aplicações à Física

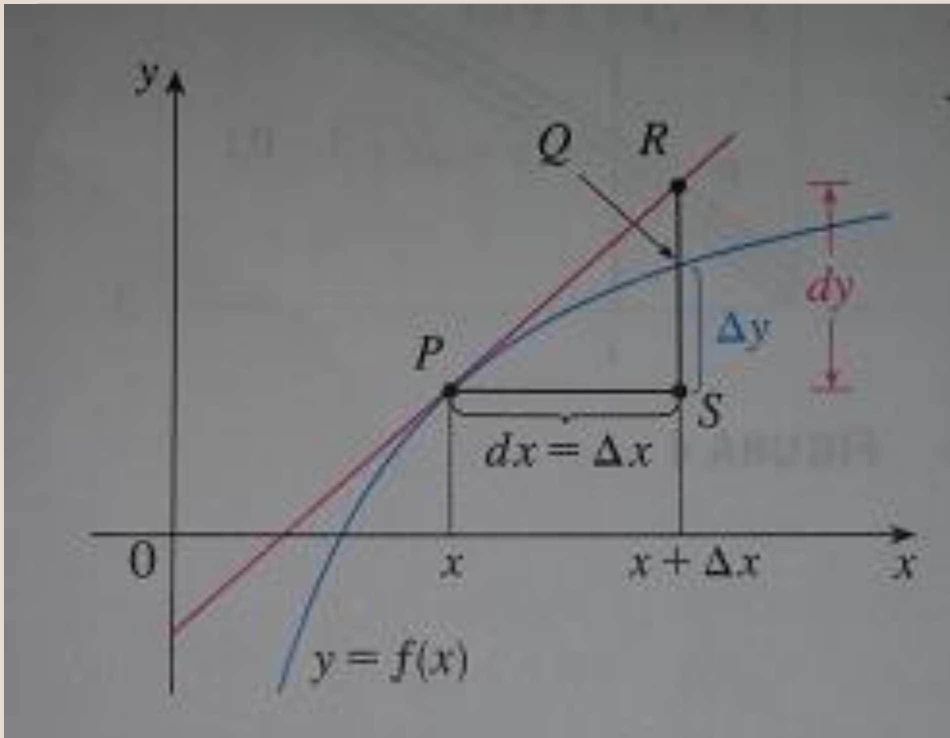
Período do Pêndulo $a_T = -g \sin \theta$

Substitui-se $\sin \theta$ por θ, se θ não for muito grande

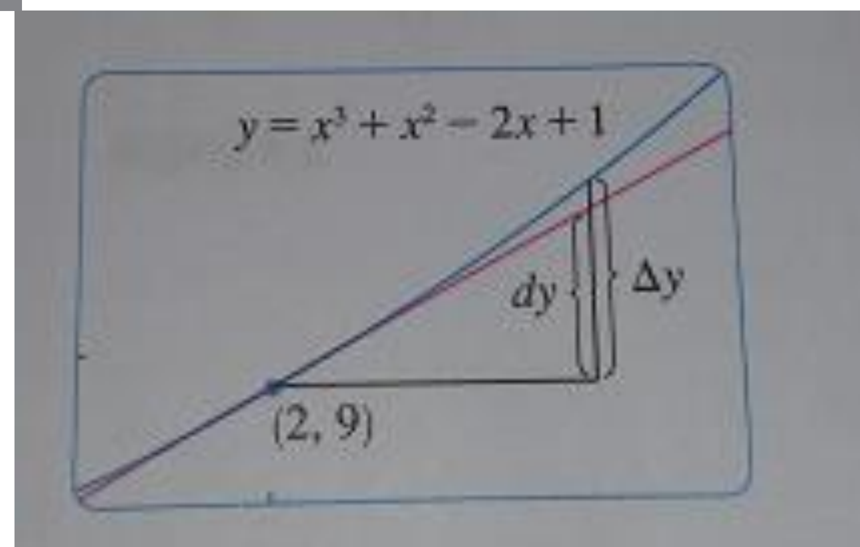
Diferenciais

Se $y = f(x)$, onde f é uma função derivável, então a diferenciável dx é uma variável independente. A diferencial dy é então definida em termos de dx pela equação

$$dy = f'(x)dx$$



y
Q
R
dy
Δy
P
S
dx = Δx
0
x
x + Δx
x
y = f(x)



y = x³ + x² − 2x + 1
dy
Δy
(2, 9)

Exemplo

Compare os valores de Δy e dy se

$$y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$$

E x varia

a) De 2 para 2,05

b) De 2 para 2,01

Exemplo

Após ter recheado um peru, sua temperatura é de 50ºF.
Você o coloca no forno, cuja temperatura é 325ºF. Depois de 1 hora, a temperatura marcada pelo termômetro no peru é de 93ºF e depois de 2 horas, ele indica 129ºF. Qual a temperatura após 3 horas?