FUV II

Informações Gerais

FUVII 2016 - segundo trimestre - segundo termo

Hora	aula1 03/out	aula2 10/out	17 out	aula3 24/out	aula4 31/out	aula5 07/Nov	14 nov	aula6 21/Nov	aula7 28/Nov	aula8 05/dez	12 dez
1	Integração: Áreas e distâncias	Avaliação1	Semana ciências do MAR	Integração por partes	Avaliação2	Integração por substituições especiais.	Feriado	Avaliação3	Área da superfície de revolução.	Avaliação Geral	
2		Integral definida. Definição analítica e suas propriedades			Substituição trigonométrica			Volumes			
3		Teorema fundamental do Calculo		Integrais trigonométricas	Integração por funções parciais	Aplicações da integração: Áreas entre curvas		Comprimento de arco.	Aplicações às Ciências Econômicas e Biológicas. Força, Trabalho e Energia.		Exame
4		Substituição simples									

Áreas e Distâncias

O Problema da Área

Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.

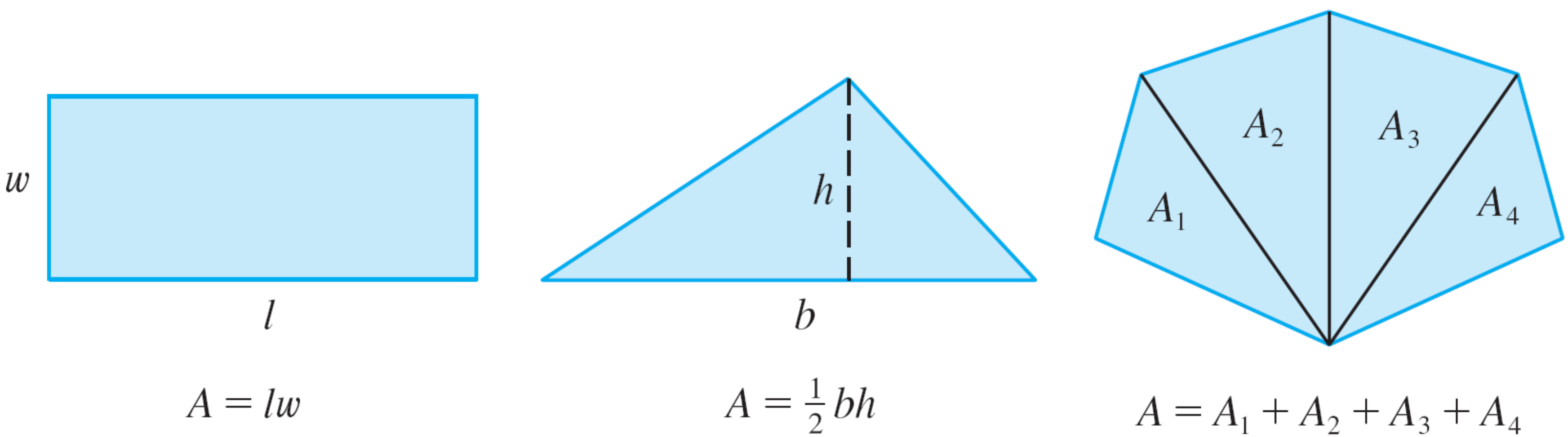
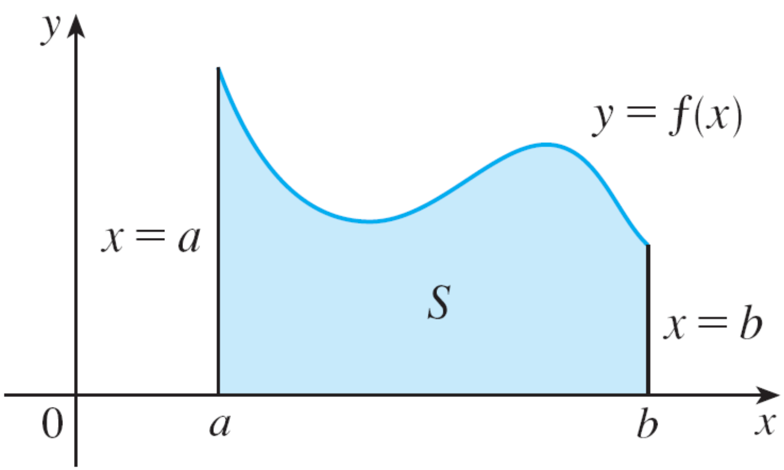


Figura 2

O Problema da Área

Nós começamos tentando resolver o *problema da área*: Encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a a b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geq 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.



$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Figura 1

O Problema da Área

Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área.

Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e, então, tomamos o limite dessas aproximações. Uma ideia similar será usada aqui para as áreas. Em primeiro lugar, aproximamos a região S utilizando retângulos e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos.

O Problema da Área

Exemplo 1

Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

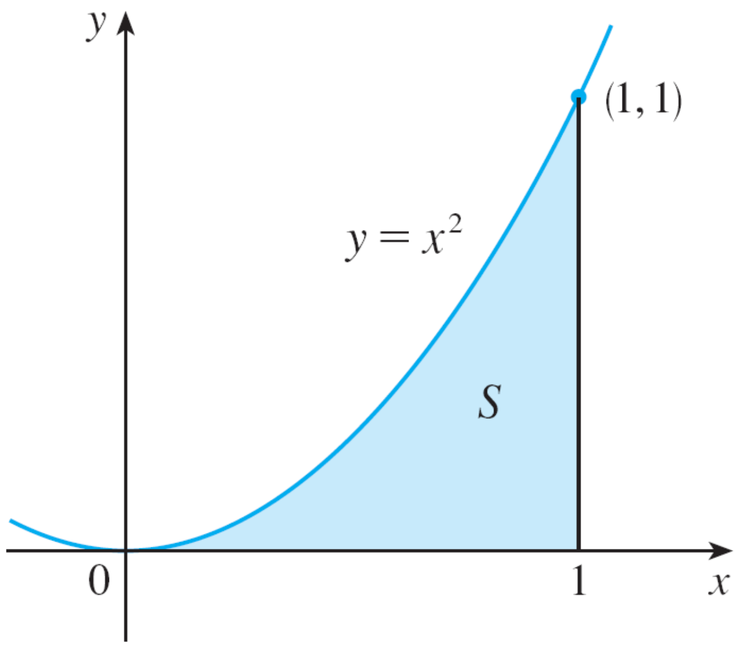


Figura 3

O Problema da Área

Exemplo 1- Solução

Observamos primeiro que a área de *S* deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois *S* está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que *S* seja dividida em quatro faixas

S_1, S_2, S_3, e S_4, traçando as retas

verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 1$,

como na Figura 4(a).

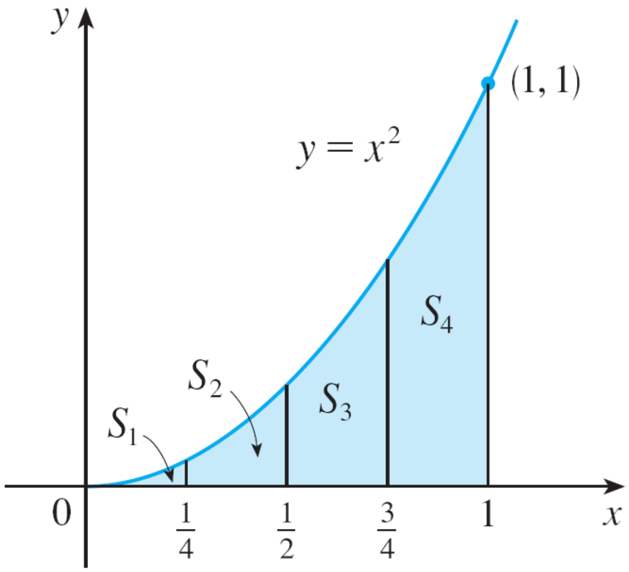


Figura 4(a)

O Problema da Área

Exemplo 1- Solução (a)

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot(1)^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

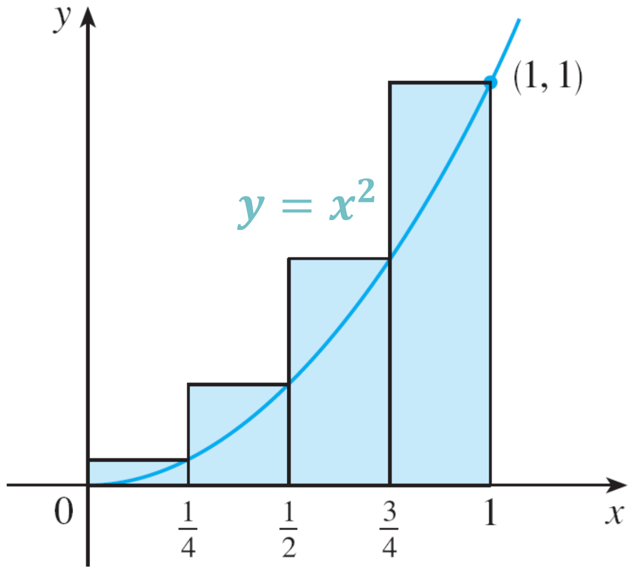


Figura 4(b)

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875.$$

O Problema da Área

Exemplo 1- Solução (b)

Em vez de usar os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de *f* nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.)

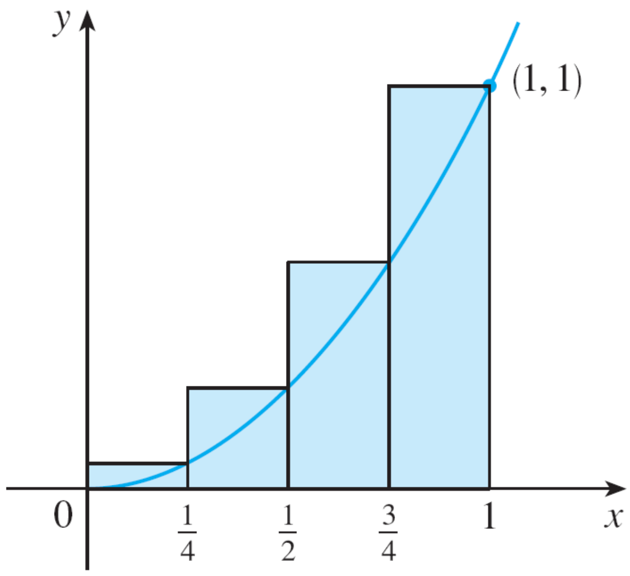


Figura 4(b)

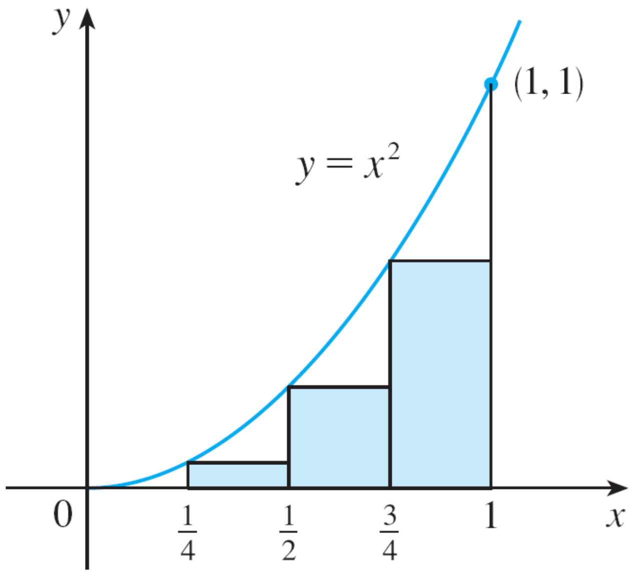
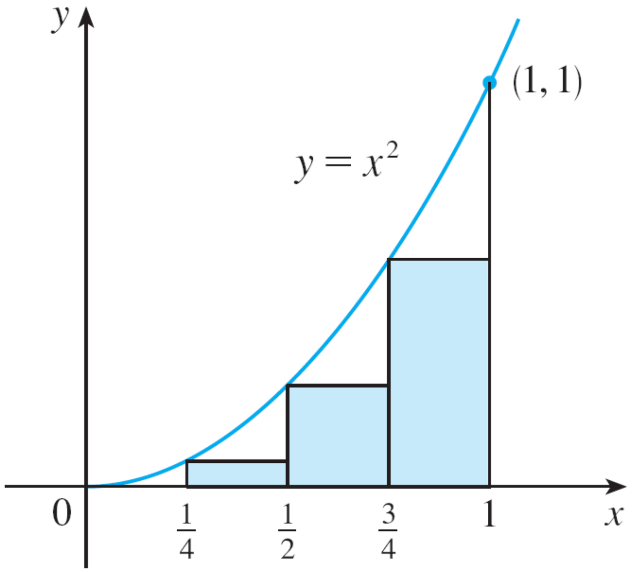


Figura 5

O Problema da Área

Exemplo 1- Solução (b)

$$L_4 = \frac{1}{4}\cdot(0)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$$



Vemos que a área de *S* é maior que L_4.

Então, temos estimativas inferior e superior para *A*:

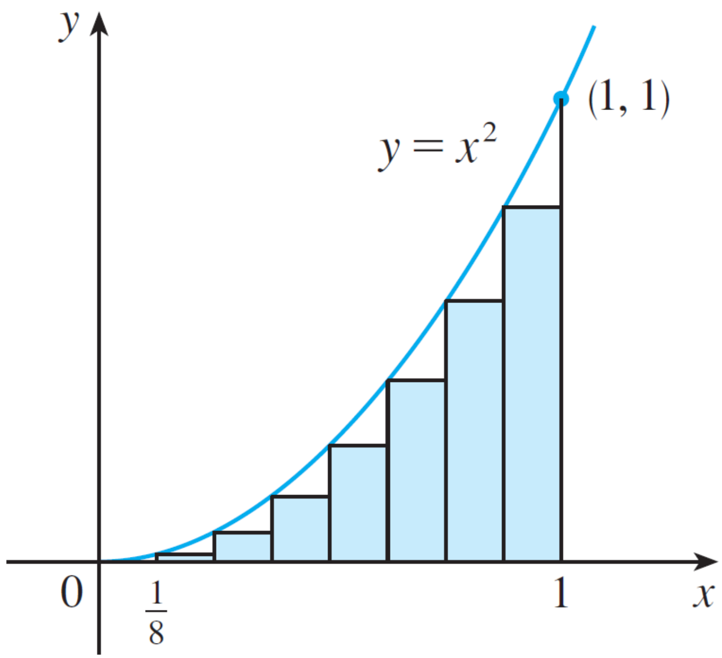
$$0{,}21875 < A < 0{,}46875.$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas.

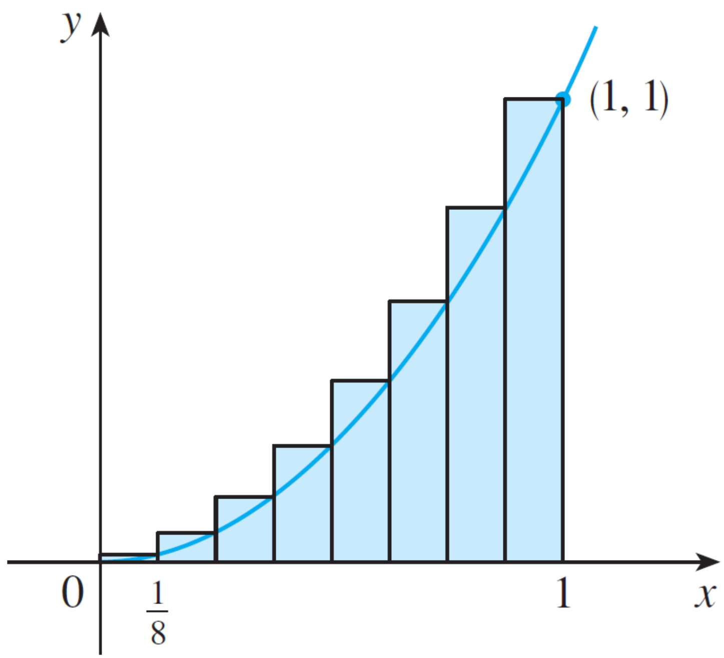
O Problema da Área

Exemplo 1- Solução

Agora dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando as extremidades esquerdas



(b) Usando as extremidades direitas

Aproximando *S* por 8 retângulos

Figura 6

O Problema da Área

Exemplo 1- Solução

A tabela à direita mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1.000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

O Problema da Área

Das Figuras 8 e 9, parece que conforme n aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores à área de S.

Figura 8

As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

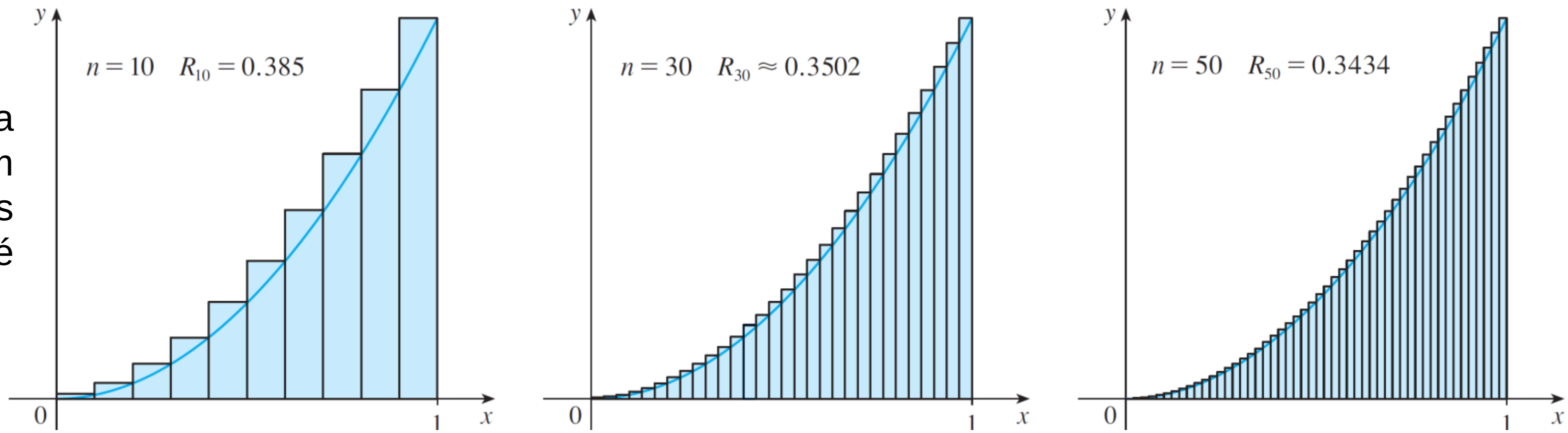
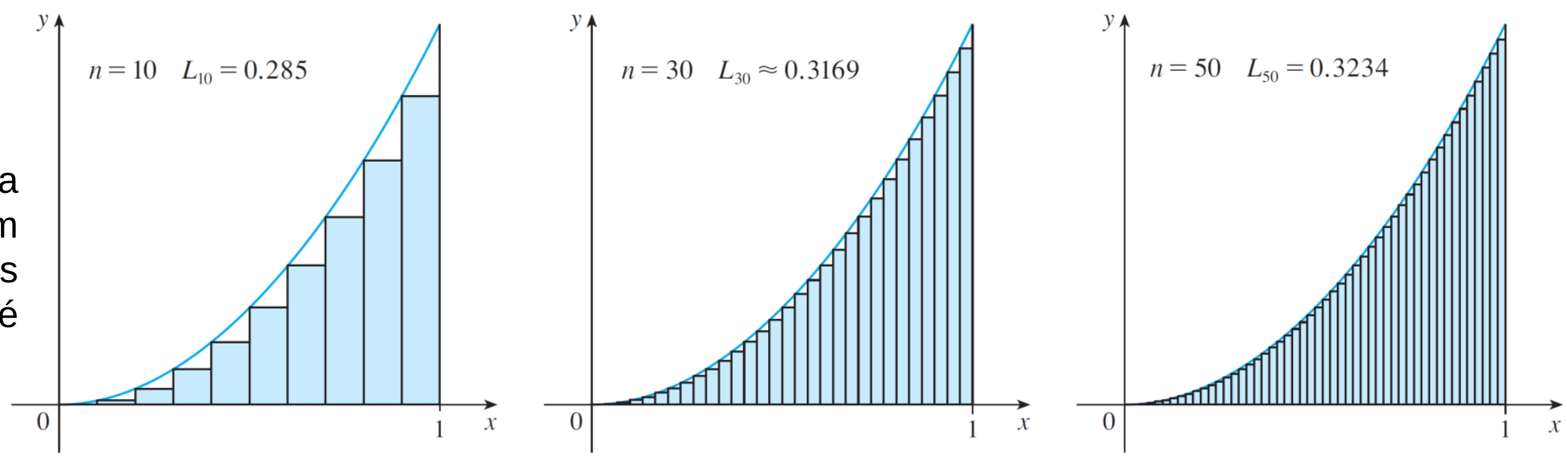


Figura 9

As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente



O Problema da Área

Portanto, *definimos* a área *A* como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes. Isto é:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

O Problema da Área

Começamos por subdividir S em n faixas S_1, S_2, …, S_n de igual largura, como na Figura 10. A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$, assim, a largura de cada uma das n faixas é: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

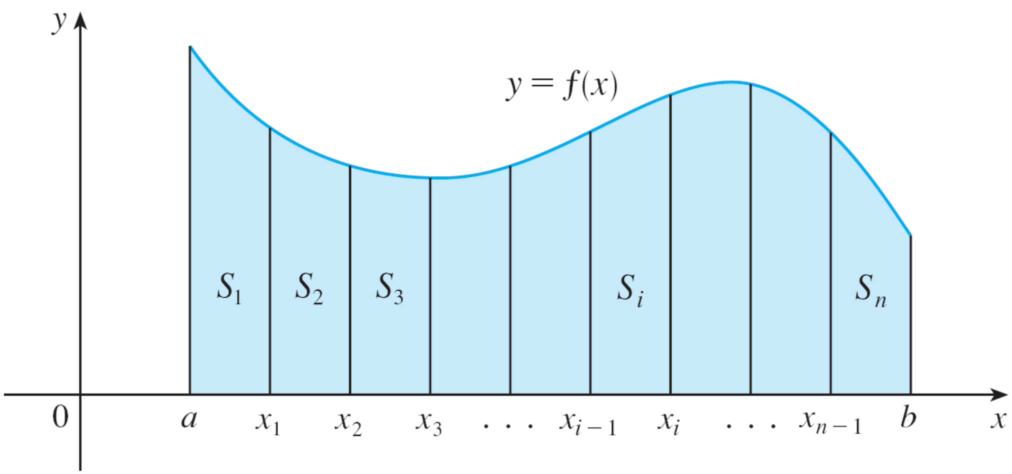


Figura 10

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$x_1 = a + \Delta x$,

$x_2 = a + 2\,\Delta x$,

$x_3 = a + 3\,\Delta x$ e assim por diante.

O Problema da Área

Vamos aproximar a i -ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (veja a Figura 11).

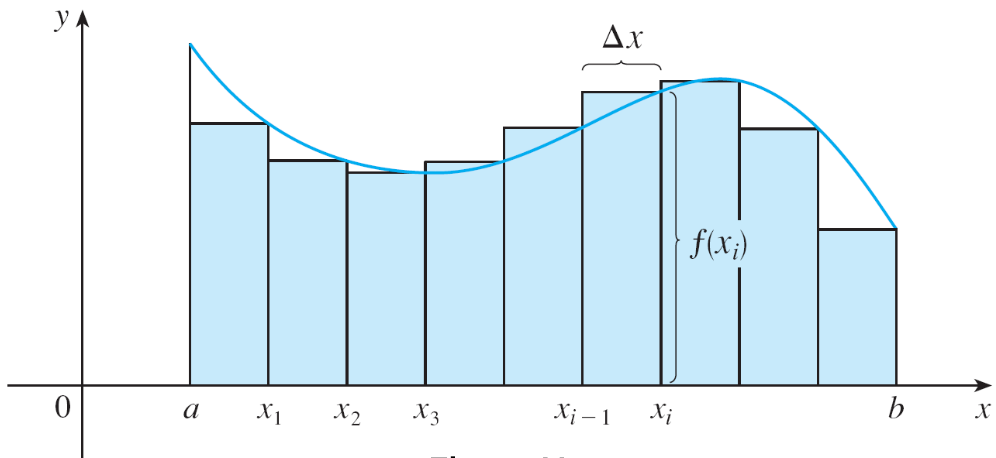


Figura 11

Então, a área do i -ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \quad . . . \quad + f(x_n)\,\Delta x$$

O Problema da Área

Essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \to \infty$.

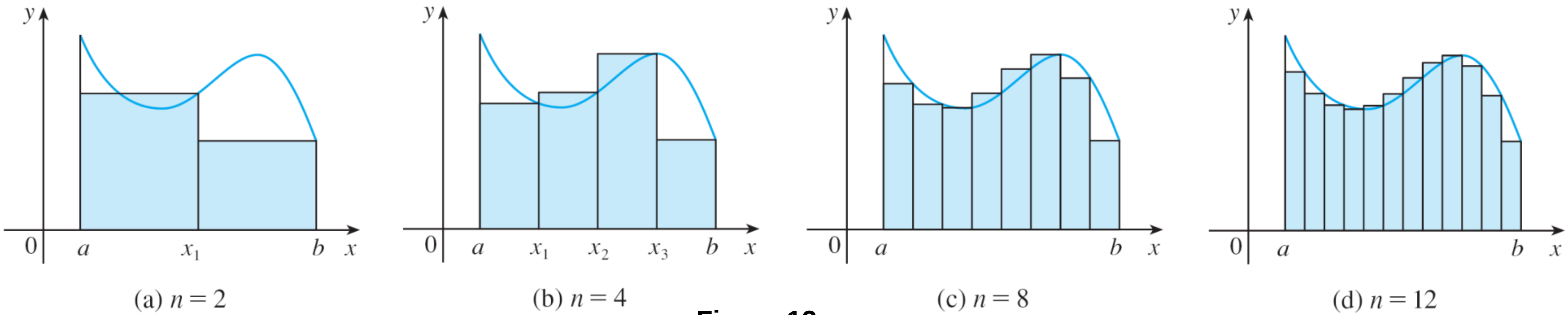


Figura 12

2 **Definição** A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x].$$

Da mesma forma

3 $$A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x].$$

O Problema da Área

De fato, em vez de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do *i* -ésimo retângulo como o valor de *f* em *qualquer* número x_i* no *i* -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1*, x_2*, \ldots, x_n*$ de **pontos amostrais**.

A Figura 13 mostra os retângulos aproximamantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área S é

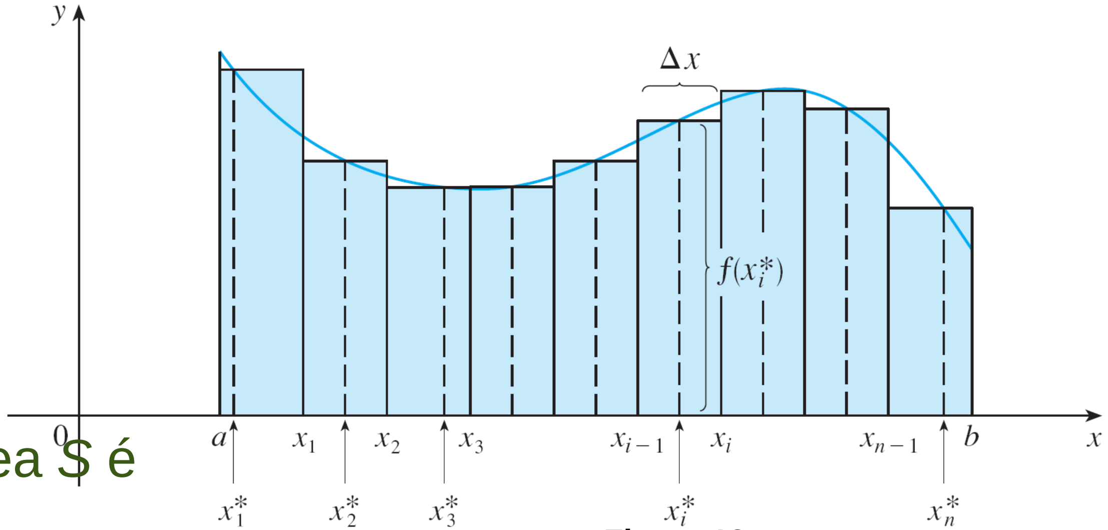


Figura 13

$$A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

4

O Problema da Área

Frequentemente usamos a **notação de somatória** (notação sigma) para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Assim, as expressões para a área nas Equações 2, 3 e 4 podem ser escritas da seguinte forma:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

O Problema da Área

Também podemos reescrever a fórmula da soma $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ como:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

O Problema da Distância

Exemplo 2

Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Para termos o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo ($1\frac{km}{h} = \frac{1000m}{3600s}$)

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

O Problema da Distância

Exemplo 2- Solução

Escolhendo as velocidades iniciais para cada intervalo, teremos:

$$d_i = v.t = (7{,}5 \times 5) + (9{,}4 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) = 342m$$

Escolhendo as velocidades finais para cada intervalo, teremos:

$$d_f = v.t = (9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) \\ +(12{,}5 \times 5) = 367m$$

O Problema da Distância

Em geral, suponha que o objeto se move com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leq t \leq b$ e $f(t) \geq 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo).Vamos registrar as velocidades nos instantes t_0 (= a), t_1, t_2,. . ., t_n (= b) de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente d = $f(t_0) \times \Delta t$.

O Problema da Distância

Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)$ x Δt. A distância total percorrida durante o intervalo de tempo [a, b] é de aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

O Problema da Distância

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, mais precisa nossa estimativa, então parece plausível que a distância *exata d* percorrida *é* o *limite* de tais expressões:

$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$