

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS BAIXADA SANTISTA

Funções de uma variável – FUV 1

Derivada

2017

Limites  fenômenos das Ciências Exatas, em especial com seus resultados experimentais.

Outra aplicação – construção de novas grandezas físicas, necessárias para a identificação dos estados dos sistemas em condições peculiares.

O limite de um quociente, escrito na forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x \rightarrow 0$, representado por:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Introduz uma nova operação matemática chamada **DERIVADA** de uma função.

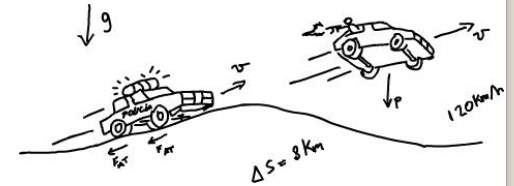
Que devido suas propriedades e aplicações –
nova representação simbólica:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Nas ciências exatas o limite é utilizado com
dupla finalidade:

1. Como instrumento de cálculo através da derivada;

2. Para introduzir definições rigorosas para novas grandezas físicas ou para grandezas físicas já utilizadas.



$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Através dessa definição que surge o conceito de derivada.

Corpos em movimento em torno de um eixo – velocidade angular w e a aceleração angular α , instantânea, são definidas por:



$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$



$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt}$$

b) Mecânica: Potência – a potência média é definida pela relação entre o trabalho realizado ΔW num intervalo de tempo Δt ; a potência instantânea P é definida por:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

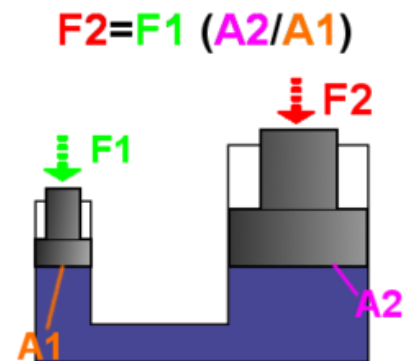


c) Hidrostática – a densidade de um fluido em um ponto A e a pressão P são definidas , de forma mais rigorosa, pelas seguintes relações:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta F}{\Delta S} \right| = \frac{dF}{dS}$$

Onde m , V , S e F , são, respectivamente, a massa, o volume, a área e a força aplicada na área S .

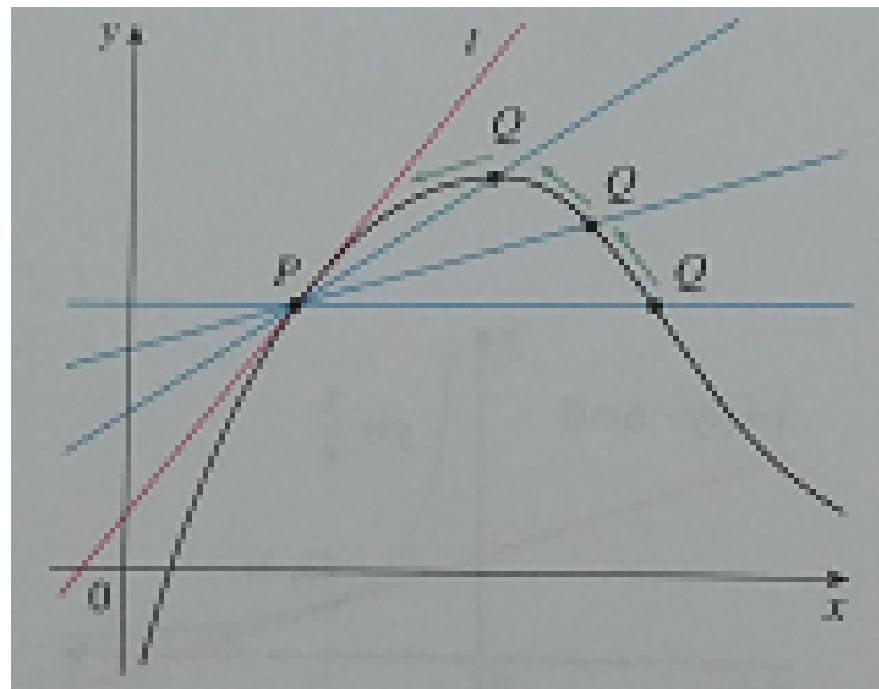
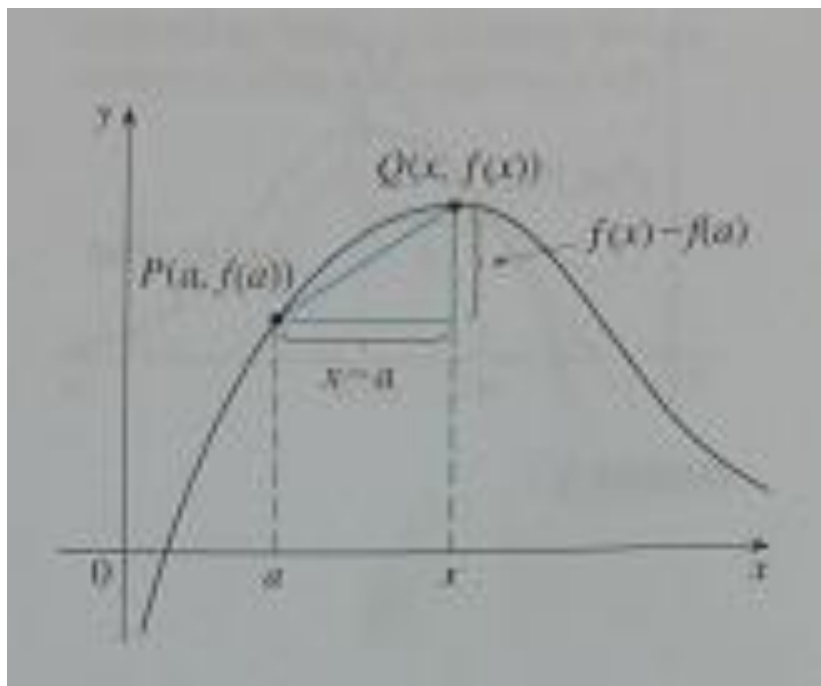


Limite  **derivada**  **taxa de
variação**

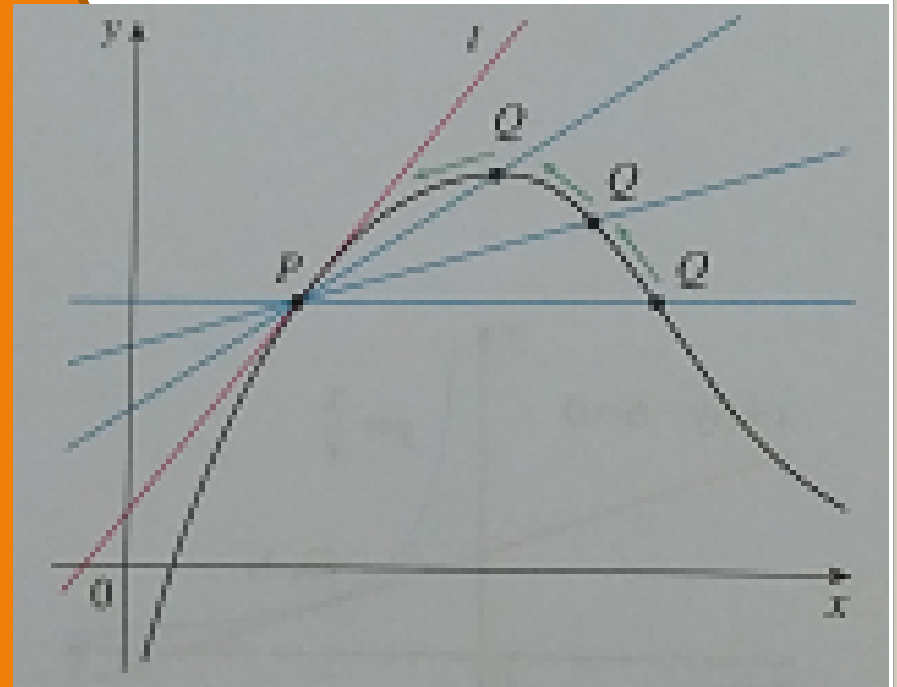
Tangentes

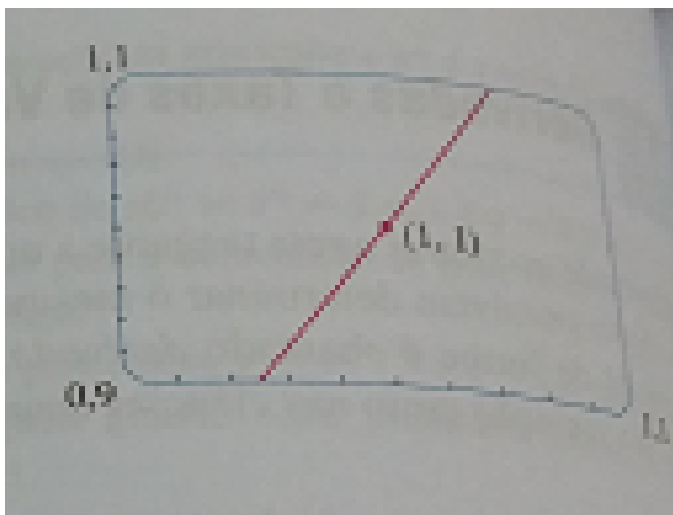
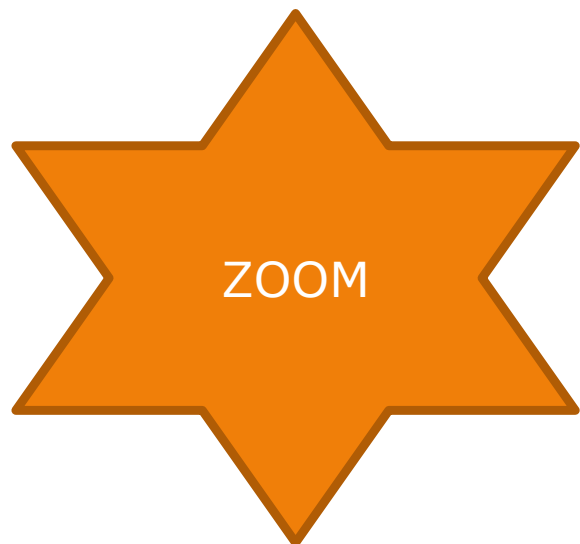
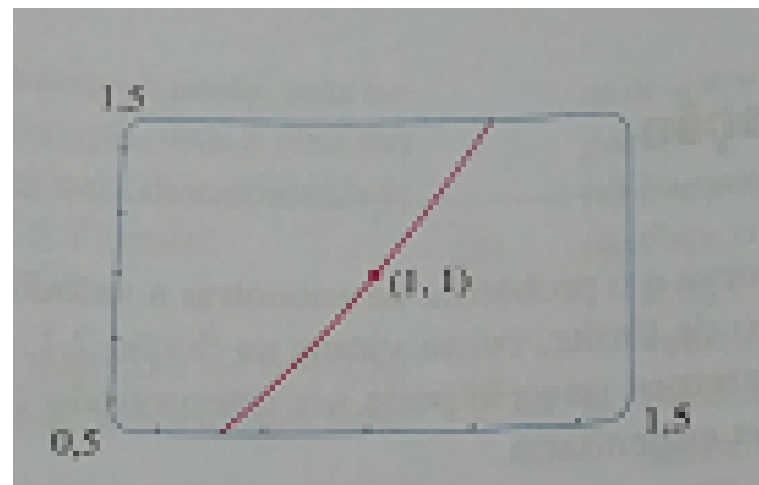
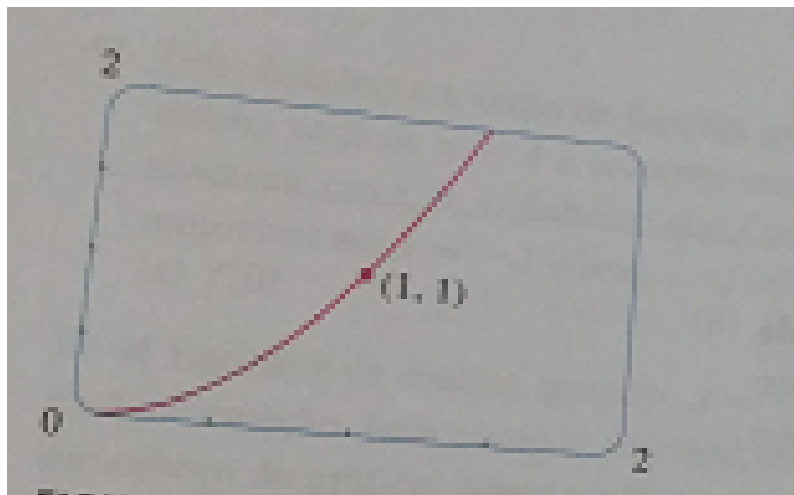
Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a reta tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto próximo $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao fazer x tender a a . Se m_{PQ} tender a um número m – definimos a tangente t como a reta que passa por P e tem inclinação m . A reta tangente é a posição limite da reta secante PQ quando Q tende a P .





A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com a inclinação

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.



NOTE:

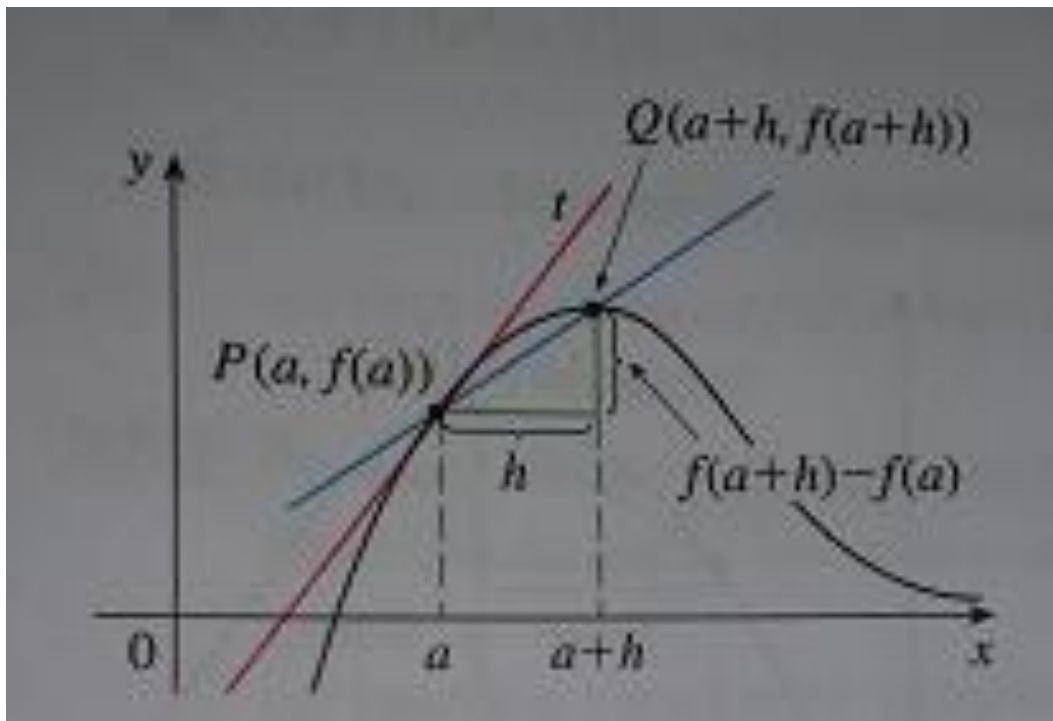
Existe outra expressão para a inclinação da reta tangente – as vezes é mais fácil de ser usada. Se $h = x - a$, então

$x = a + h$, assim a inclinação da reta secante PQ é:

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

INCLINAÇÃO DA
RETA TANGENTE

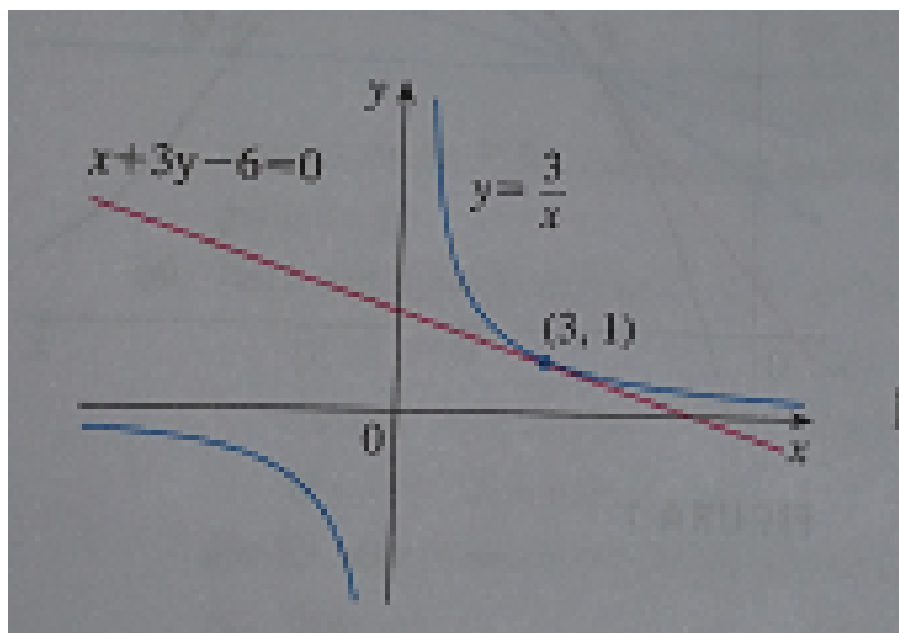


$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemplo:

Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto $(3, 1)$.



Solução: Seja $f(x) = 3/x$. Então a inclinação da reta tangente em $(3, 1)$ é

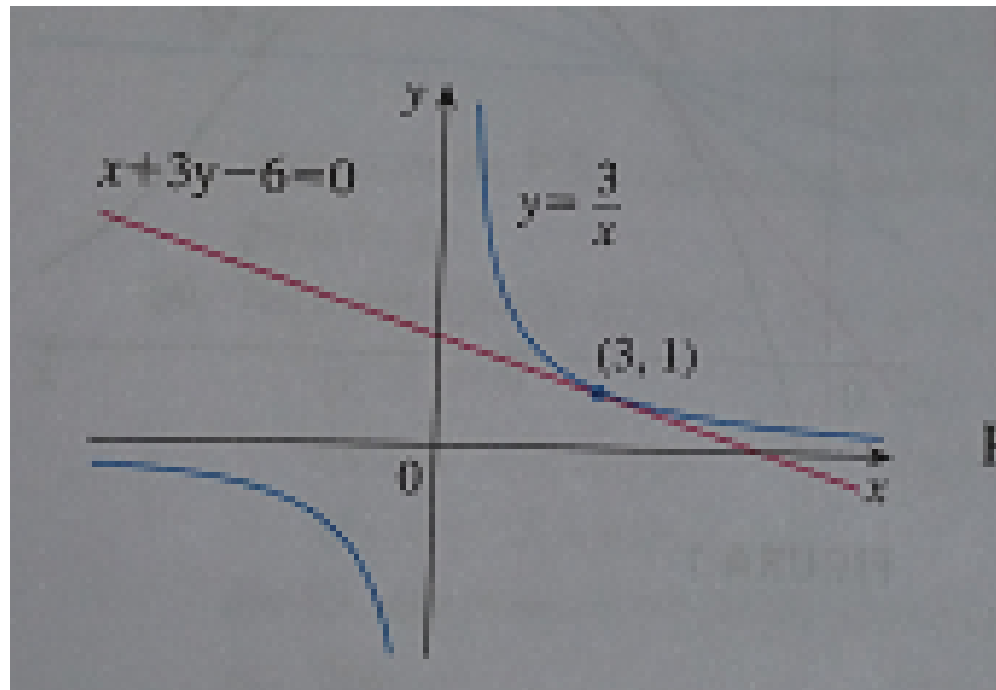
$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - (3+h)}{3+h}}{h}$$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

Portanto, uma equação da reta tangente no ponto $(3, 1)$ é:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

Que se simplifica: $x + 3y - 6 = 0$



Definição de Derivada

Vimos que o mesmo tipo de limite surge ao encontrar a inclinação de uma reta tangente ou velocidade de um objeto –

Limites do tipo

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Surgem sempre que calculamos a taxa de variação – ciências ou engenharias, química, economia .

Definição: a derivada de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$, é:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Representação – $f'(x)$ ou df/dx , onde df e dx podem ser vistos como **variações infinitesimais**. Então, podemos escrever que a derivada de $f(x)$ em relação a x é:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{I})$$

Exemplo:

Seja a função $f(x) = x^2$, usando a relação acima, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

Taxas de Variação:

- ✓ **Taxa de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ (inclinação da reta secante);**
- ✓ **Taxa (instantânea) de variação de y em relação a x , $x_1=x_2$ (inclinação da reta tangente)**

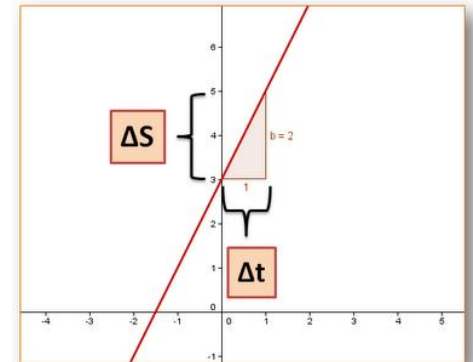
Cálculo Diferencial

Introduz dois operadores matemáticos diferentes: o **diferencial** e a **derivada**.

Diferença Finita e Diferencial

Diferença finita: Símbolo Δx (ou Δy) representa uma diferença finita entre dois valores da grandeza x (ou y);

$$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$$



Utilização – na definição de grandezas físicas médias, por exemplo:

$$\bar{v} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Onde S_1 , S_2 , v_1 e v_2 são as posições e as velocidades da partícula nos instantes t_1 e t_2 , e v e a indicam a velocidade e a aceleração médias.

Diferencial: A representação **dx, dy** denomina-se **diferencial de x, diferencial de y**, significa que a diferença $x_2 - x_1$, ou $y_2 - y_1$ **é tão pequena** (é um infinitésimo), que não tem mais sentido escrevê-la na forma anterior, Δx

Diferencial: só pode ser aplicado a funções contínuas – também pode ser interpretado como uma **diferença que não pode ser mensurável fisicamente**. O diferencial **dx** pode ser definido a partir de uma condição limite sobre **Δx** , fazendo-o tender a zero, isto é,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \rightarrow dx$$

Exemplos

1) Uma curva tem por equação:

$$y = f(x).$$

- a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$
- b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P .

2) Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

3) O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

Derivada da Função Potência – Caso Geral

O cálculo da derivada de qualquer função pode ser feito através da sua definição dada por I.

Seja a função $f(x) = x^n$, no qual n pode ser qualquer número racional. Assim:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Uso de - Expansão binominal

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \dots - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1} \quad \textbf{(II)}$$

O resultado II é a derivada do caso geral de uma função de potência. Reescrevendo, temos:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

(III)

Exemplos e Exercícios

Significado Físico da Derivada

A **derivada** é uma **operação matemática** – aplica as funções matemáticas ou às funções pertencentes aos fenômenos físicos, químicos, etc.

Como exemplo, consideremos o **problema da determinação da velocidade de uma partícula** – problema fundamental da Cinemática e um dos problemas que deu origem ao cálculo.

Seja: $S = S(t)$, a equação horária de uma partícula, e suponha que em intervalos de tempos iguais, os espaços percorridos sejam diferentes, ou seja, movimento não é uniforme.

A Cinemática procura definir a velocidade v da partícula num dado instante, também chamada de **velocidade instantânea**.

Se forem tomados **valores cada vez menores** para **Δt** (t_B se aproximando de t_A), o **espaço percorrido ΔS também diminuirá**, de modo que quando $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta S \rightarrow 0$.

Nessas condições, quando t_B se aproximar infinitesimalmente de t_A , o quociente $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

será representado por uma indeterminação:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{0}{0}$$

Velocidade instantânea da partícula – (o ponto B coincide com o ponto A).

Matematicamente:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

$$v = \frac{dS}{dt}$$

Velocidade é a derivada do espaço em relação ao tempo.

Significado Matemático da Derivada

1 – Geométrico

2 - Trigonométrico

3 – Analítico

Geométrico – a derivada é a reta tangente a uma curva num dado ponto

Exemplo – A equação horária para um certo movimento de uma partícula é dada por:

$S = 20 + 10t + 6t^2$. Escrever a partir da definição de derivada, a equação da velocidade.

Solução - Como a velocidade é, por definição, o limite da variação do espaço pelo tempo gasto em percorrê-lo, quando esse tempo tende a zero, o cálculo do limite anterior para $y = S$ e $x = t$, irá resultar na equação da velocidade, assim:

$$f(t) = 20 + 10t + 6t^2$$

$$f(t + \Delta t) = 20 + 10(t + \Delta t) + 6(t + \Delta t)^2$$

$$f(t + \Delta t) - f(t) = 20 + 10t + 10\Delta t + 6(t + \Delta t)^2 - 20 - 10t - 6t^2$$

$$f(t + \Delta t) - f(t) = 10\Delta t + 12t\Delta t + 6\Delta t^2$$

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = 10 + 12t + 6\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + 12t + 6\Delta t) = 10 + 12t$$

$$v = 10 + 12t$$

Regras Básicas para a Diferenciação

1) Regra da constante

A derivada de uma função constante é a função nula, se c é uma constante, então:

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

Exemplo: Seja uma função constante definida pela equação $f(x) = 5 + \pi$

Solução:

Pela regra da constante $f'(x) = 0$.

2) Regra da identidade

A derivada da função identidade é a função constante 1. Simbolicamente,

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

3) Regra da potência

A derivada de uma potência inteira positiva de x é o expoente de x vezes x elevado à potência inferior seguinte. Simbolicamente, se n é um inteiro positivo fixado, então:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Exemplo. Diferencie a função $f(x) = x^7$

Solução:

Pela regra da potência,

$$f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

4) Regra da Homogeneidade

A derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função. Simbolicamente, se c é uma constante e u é uma função diferenciável de x , então:

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

Exemplo: Diferencie a função $f(x) = 5x^4$.

Solução: usando ambas as regras da homogeneidade e potência, temos:

$$\frac{d}{dx}(5x^4) = 5 \frac{d}{dx}(x^4) = 5(4x^3) = 20x^3$$

5) Regra da soma

A derivada de uma soma é a soma das derivadas. Simbolicamente, se u e v são funções diferenciáveis de x , então:

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Exemplo. Calcule $D_x(3x^5 + 11x^8)$

$$\begin{aligned} D_x(3x^5 + 11x^8) &= D_x(3x^5) + D_x(11x^8) \quad (\text{regra da soma}) \\ &= 3D_x(x^5) + 11D_x(x^8) \quad (\text{regra da homogeneidade}) \\ &= 3(5x^4) + 11(8x^7) \quad (\text{regra da potência}) \\ &= 15x^4 + 88x^7 \end{aligned}$$

6) Regra do Produto ou regra de Leibniz

A derivada do produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a derivada da primeira função vezes a segunda função. Simbolicamente, se u e v são funções diferenciáveis de x , então:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Exemplo

Calcule $D_x[(3x^2 + 1)(7x^3 + x)]$

Solução

$$\begin{aligned} D_x[(3x^2 + 1)(7x^3 + x)] &= (3x^2 + 1)[D_x(7x^3 + x)] + \\ &+ (7x^3 + x)[D_x(3x^2 + 1)] \\ &= (3x^2 + 1)[(D_x 7x^3 + D_x x)] + (7x^3 + x)[D_x(3x^2) \\ &+ D_x 1] \\ &= (3x^2 + 1)(21x^2 + 1) + (7x^3 + x)(6x) \\ &= (63x^4 + 24x^2 + 1) + (42x^4 + 6x^2) \\ &= 105x^4 + 30x^2 + 1. \end{aligned}$$

7) Regra da inversa da aritmética

A derivada da inversa da aritmética de uma função é a razão negativa da derivada da função para o quadrado da função. Simbolicamente se v é uma função diferenciável em x , então:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{v} \right) = - \frac{dv/dx}{v^2}$$

Exemplo - Calcule $D_x(1/x)$

Solução

$$D_x \left(\frac{1}{x} \right) = - \frac{D_x x}{x^2} = - \frac{1}{x^2}$$

8) Regra do quociente

A derivada de um quociente de duas funções é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador tudo dividido pelo quadrado do denominador. Simbolicamente, se u e v são funções diferenciáveis de x , então:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Exemplo Calcule

$$D_x \left(\frac{x^2}{x^3 + 7} \right)$$

Resumo – Regras Básicas para Diferenciação

$$1) \frac{dc}{dx} = 0$$

$$2) \frac{dx}{dx} = 1$$

$$3) \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$4) \frac{d}{dx} (cu) = c \frac{du}{dx}$$

$$5) \frac{d}{dx} (u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$6) \frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$7) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{v} \right) = - \frac{dv/dx}{v^2}$$

$$8) \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$