5.1 Áreas e Distâncias

Agora é um bom momento para ler (ou reler) *Uma Apresentação do Cálculo*. Lá, são discutidas as ideias unificadoras do cálculo, e a seção ajuda a colocar em perspectiva de onde saímos e para onde iremos.

Nesta seção vamos descobrir que, na tentativa de encontrar a área sob uma curva ou a distância percorrida por um carro, encontramos o mesmo tipo especial de limite.

O Problema da Área

Nós começamos tentando resolver o *problema da área*: encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geqslant 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

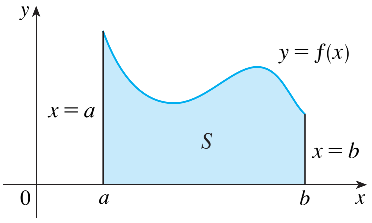


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Ao tentarmos resolver o problema da área, devemos nos perguntar: qual é o significado da palavra *área*? Essa questão é fácil de ser respondida para regiões com lados retos. Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.

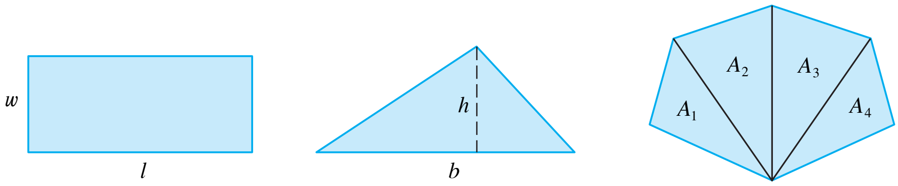


FIGURA 2 $A = lw$ $\quad A = \frac{1}{2}bh \quad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Não é tão fácil, no entanto, encontrar a área de uma região com lados curvos. Temos uma ideia intuitiva de qual é a área de uma região. Mas parte do problema da área é tornar precisa essa ideia intuitiva, dando uma definição exata de área.

Lembre-se de que, ao definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e, então, tomamos o limite dessas aproximações. Uma ideia similar será usada aqui para as áreas. Em primeiro lugar, aproximamos a região S utilizando retângulos e depois tomamos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos. Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

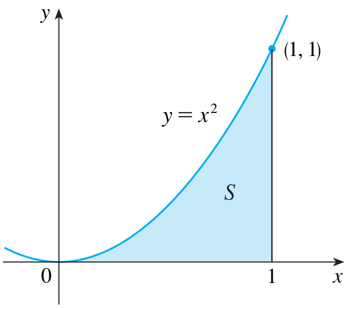


FIGURA 3

EXEMPLO 1 Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

SOLUÇÃO Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3 e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

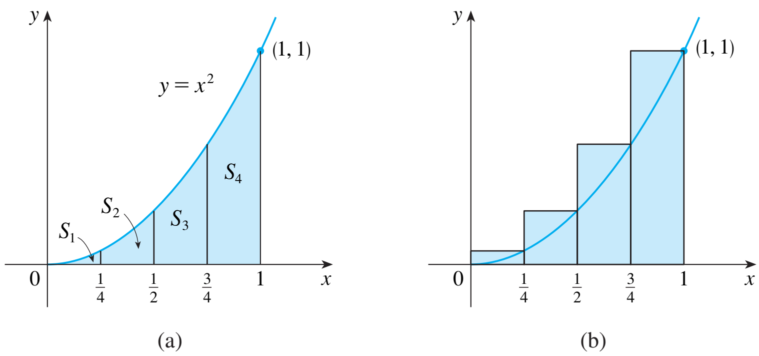


FIGURA 4

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)]. Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e altura de $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ e 1^2. Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximantes, teremos

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875$$

Em vez de usarmos os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de f nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.) A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

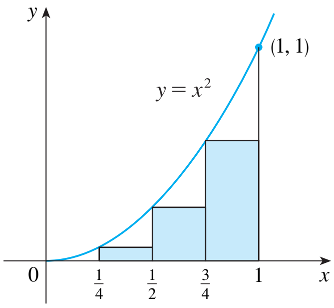


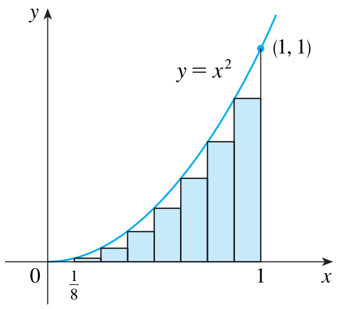
FIGURA 5

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{32} = 0{,}21875$$

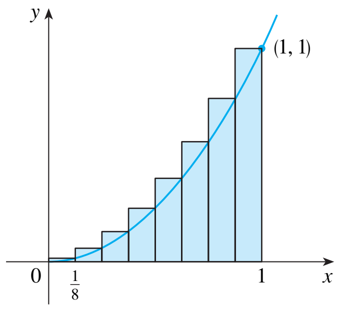
Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas. A Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a região S em oito faixas com a mesma largura.



(a) Usando as extremidades esquerdas



(b) Usando as extremidades direitas

FIGURA 6
Aproximando S por 8 retângulos

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas. A tabela na lateral mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0{,}3333335$.

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

Dos valores na tabela, parece que R_n aproxima-se de $\frac{1}{3}$ à medida que aumentamos n. Confirmamos isso no próximo exemplo.

EXEMPLO 2 Para a região S do Exemplo 1, mostre que a soma das áreas dos retângulos aproximantes superiores tende a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

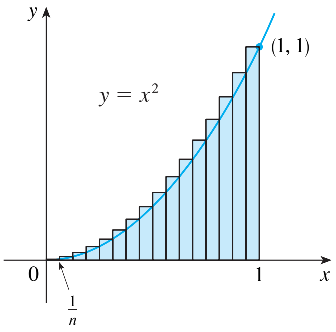


FIGURA 7

SOLUÇÃO R_n é a soma das áreas dos n retângulos na Figura 7. Cada retângulo tem uma largura $1/n$, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; isto é, as alturas são $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. Logo,

$$R_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

Utilizamos aqui a fórmula para a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Talvez você já tenha visto essa fórmula antes. Ela está demonstrada no Exemplo 5 no Apêndice E.

Colocando a Fórmula 1 na nossa expressão para R_n, temos

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Estamos calculando aqui o limite da sequência $\{R_n\}$. Sequências e seus limites são discutidos em *Uma Apresentação do Cálculo* e serão estudados em detalhes na Seção 11.1. A ideia é bastante similar ao limite no infinito (Seção 2.6), exceto que ao escrever $\lim_{n\to\infty}$ nós restringimos a n número inteiro positivo. Em particular, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Quando escrevemos $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$, queremos dizer que podemos fazer que R_n seja o mais próximo de $\frac{1}{3}$ que desejamos ao tornar n suficientemente grande.

Então, temos

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Pode ser mostrado que as somas aproximantes inferiores também tendem a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

TEC Em *Visual 5.1*, você pode criar figuras como as Figuras 8 e 9 para outros valores de n.

Das Figuras 8 e 9, parece que conforme n aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores da área de S. Portanto, *definimos* a área A como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes, isto é,

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

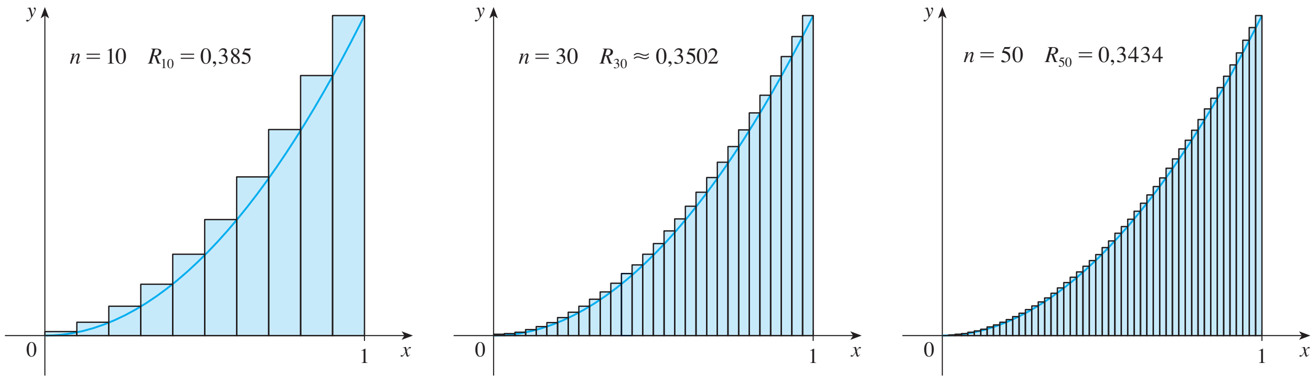


FIGURA 8 As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

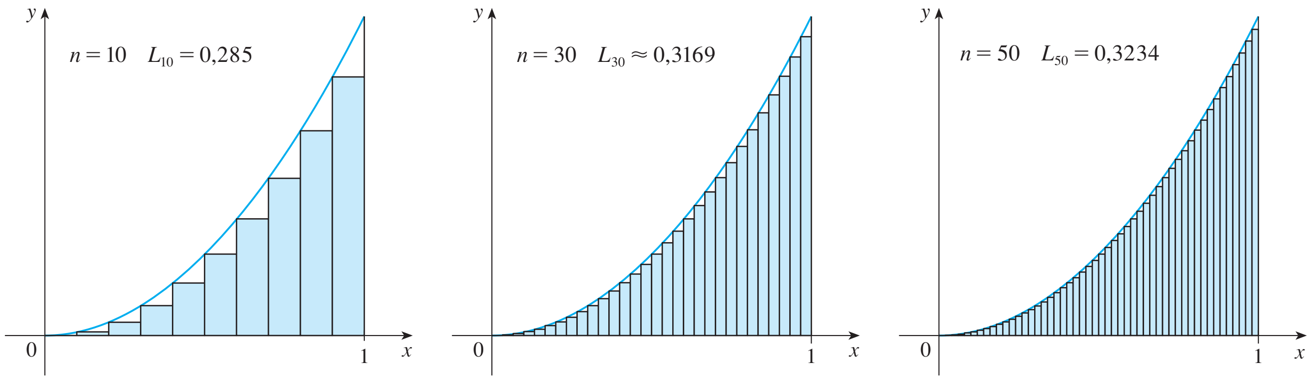


FIGURA 9 As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Vamos aplicar a ideia dos Exemplos 1 e 2 para as regiões S mais gerais da Figura 1. Começamos por subdividir S em n faixas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual largura, como na Figura 10.

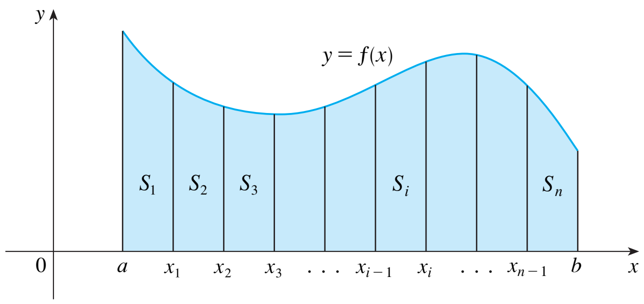


FIGURA 10

A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$; assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Essas faixas dividem o intervalo [a, b] em n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x,$$
$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$
$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$
$$\vdots$$

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (veja a Figura 11). Então, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

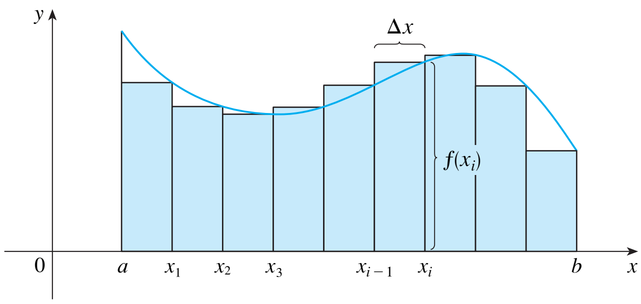
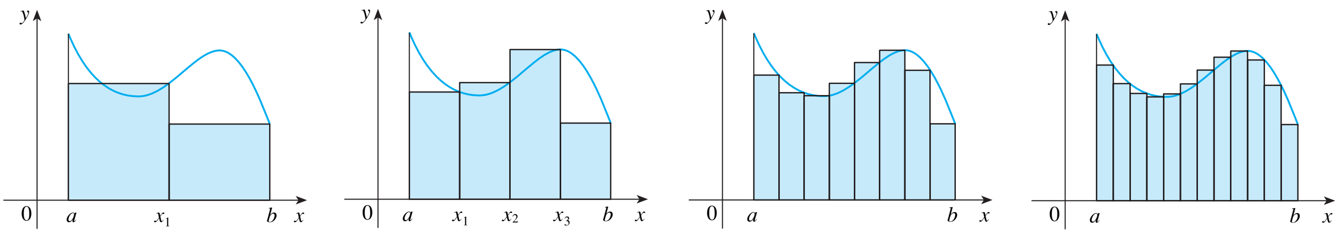


FIGURA 11

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

A Figura 12 mostra a aproximação para $n = 2$, 4, 8 e 12. Observe que essa aproximação



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

FIGURA 12

parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \to \infty$. Portanto, vamos definir a área A da região S da seguinte forma.

2 **Definição** A **área** A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Pode ser demonstrado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que f seja contínua. Pode também ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas aproximantes:

3 $$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De fato, em vez de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^* no i-ésimo subintervalo

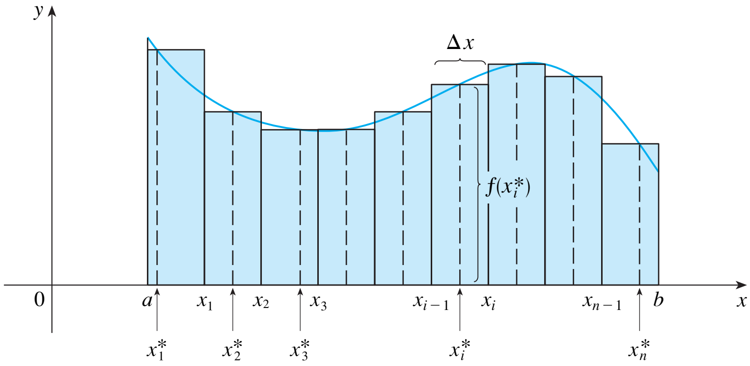


FIGURA 13

$[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ de **pontos amostrais**. A Figura 13 mostra os retângulos aproximantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área S é

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

OBSERVAÇÃO Pode ser mostrado que uma definição equivalente de área é a seguinte: *A é o único número que é menor que todas as somas superiores e maior que todas as somas inferiores*. Vimos nos Exemplos 1 e 2, por exemplo, que a área $\left(A = \frac{1}{3}\right)$ está presa entre todas as somas esquerdas aproximantes L_n e todas as somas direitas aproximantes R_n. A função,

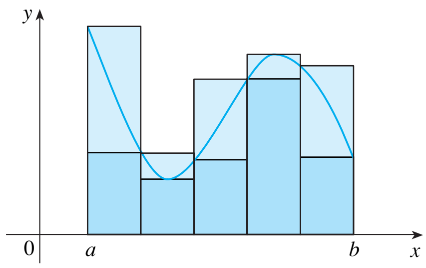


FIGURA 14
Somas inferiores (retângulos pequenos) e somas superiores (retângulos grandes)

nesses exemplos, $f(x) = x^2$, é crescente em $[0, 1]$ e, portanto, suas somas inferiores decorrem das extremidades esquerdas e as somas superiores, das extremidades direitas. (Veja as Figuras 8 e 9.) Em geral, formamos as **somas inferiores** (e **superiores**) escolhendo os pontos amostrais x_i^*, de modo que $f(x_i^*)$ é o mínimo (e máximo) valor de f no subintervalo i-ésimo. (Veja a Figura 14 e o Exercício 7–8.)

Frequentemente usamos a **notação de somatório** (notação sigma) para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta. Por exemplo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Isso nos diz para parar quando i = n.

Isso nos diz para somar.

$$\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Isso nos diz para começar com i = m.

Se você precisar de prática com a notação sigma, olhe os exemplos e tente alguns dos exercícios do Apêndice E.

Assim, as expressões para a área nas Equações 2, 3 e 4 podem ser escritas da seguinte forma:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Também podemos reescrever a Fórmula 1 da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXEMPLO 3 Seja A a área da região que está sob o gráfico de $f(x) = e^{-x}$ entre $x = 0$ e $x = 2$.
(a) Usando as extremidades direitas, encontre uma expressão para A como um limite. Não calcule o limite.
(b) Estime a área tomando como pontos amostrais os pontos médios e usando quatro e depois dez subintervalos.

SOLUÇÃO
(a) Uma vez que $a = 0$ e $b = 2$, a largura de um subintervalo é

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Portanto, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ e $x_n = 2n/n$. A soma das áreas dos retângulos aproximantes é

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 2, a área é

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Usando a notação de somatória podemos escrever

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

É difícil calcular esse limite diretamente à mão, mas com a ajuda de um SCA isso não é tão complicado (veja o Exercício 28). Na Seção 5.3 seremos capazes de encontrar A mais facilmente usando um método diferente.

(b) Com $n = 4$, os subintervalos com mesma largura $\Delta x = 0{,}5$ são $[0; 0{,}5]$, $[0{,}5; 1]$, $[1; 1{,}5]$ e $[1{,}5; 2]$. Os pontos médios desses intervalos são $x_1^* = 0{,}25$, $x_2^* = 0{,}75$, $x_3^* = 1{,}25$ e $x_4^* = 1{,}75$, e a soma das áreas dos quatro retângulos aproximantes (veja a Figura 15) é

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0{,}25)\,\Delta x + f(0{,}75)\,\Delta x + f(1{,}25)\,\Delta x + f(1{,}75)\,\Delta x \\ &= e^{-0{,}25}(0{,}5) + e^{-0{,}.75}(0{,}5) + e^{-1{,}.25}(0{,}5) + e^{-1{,}75}(0{,}5) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-0{,}25} + e^{-0{,}75} + e^{-1{,}25} + e^{-1{,}75}\right) \approx 0{,}8557 \end{aligned}$$

Logo, uma estimativa para a área é

$$A \approx 0{,}8557.$$

Com $n = 10$, os subintervalos são $[0; 0{,}2]$, $[0{,}2; 0{,}4]$, ..., $[1{,}8; 2]$ e os pontos médios são $x_1^* = 0{,}1$, $x_2^* = 0{,}3$, $x_3^* = 0{,}5$, ..., $x_{10}^* = 1{,}9$. Assim,

$$\begin{aligned} A \approx M_{10} &= f(0{,}1)\,\Delta x + f(0{,}3)\,\Delta x + f(0{,}5)\,\Delta x + \cdots + f(1{,}9)\,\Delta x \\ &= 0{,}2\left(e^{-0{,}1} + e^{-0{,}3} + e^{-0{,}5} + \cdots + e^{-1{,}9}\right) \approx 0{,}8632 \end{aligned}$$

Da Figura 16 parece que essa estimativa é melhor que a estimativa com $n = 4$.

O Problema da Distância

Vamos considerar agora o *problema da distância*: encontre a distância percorrida por um objeto durante um certo período de tempo, sendo que a velocidade do objeto é conhecida em todos os instantes. (De certa forma esse é o problema inverso do problema da velocidade que discutimos na Seção 2.1.) Se a velocidade permanece constante, então o problema de distância é fácil de resolver por meio da fórmula

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}.$$

Mas se a velocidade variar, não é tão fácil determinar a distância percorrida. Vamos investigar o problema no exemplo a seguir.

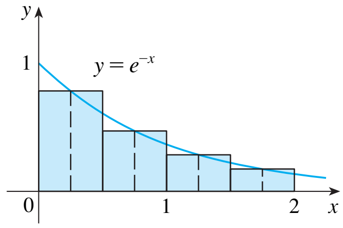


FIGURA 15

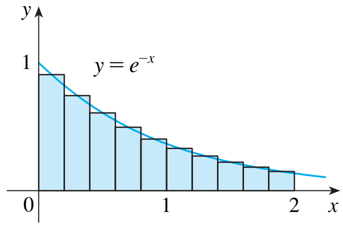


FIGURA 16

EXEMPLO 4 Suponha que queiramos estimar a distância percorrida por um carro durante um intervalo de tempo de 30 segundos. A cada 5 segundos registramos a leitura do velocímetro na seguinte tabela:

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (km/h)	27	34	38	46	51	50	45

Para termos o tempo e a velocidade em unidades consistentes, vamos converter a velocidade para metros por segundo (1 km/h = 1 000/3 600 m/s):

Tempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidade (m/s)	7,5	9,4	10,6	12,8	14,2	13,9	12,5

Durante os cinco primeiros segundos a velocidade não varia muito, logo, podemos estimar a distância percorrida durante esse tempo supondo que a velocidade seja constante. Se tomarmos a velocidade durante aquele intervalo de tempo como a velocidade inicial (7,5 m/s), então obteremos aproximadamente a distância percorrida durante os cinco primeiros segundos:

$$7{,}5 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 37{,}5 \text{ m}.$$

Analogamente, durante o segundo intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente constante, e vamos considerá-la quando $t = 5$s. Assim, nossa estimativa para a distância percorrida de $t = 5$ s até $t = 10$ s é

$$9{,}4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 47 \text{ m}.$$

Adicionando estimativas similares para os outros intervalos de tempo, obtemos uma estimativa para a distância total percorrida:

$$(7{,}5 \times 5) + (9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) = 342 \text{ m}.$$

Podemos, da mesma forma, usar a velocidade no *fim* de cada intervalo de tempo em vez de no começo como a velocidade constante. Então, nossa estimativa se torna

$$(9{,}4 \times 5) + (10{,}6 \times 5) + (12{,}8 \times 5) + (14{,}2 \times 5) + (13{,}9 \times 5) + (12{,}5 \times 5) = 367 \text{ m}.$$

Se quisermos uma estimativa mais precisa, podemos tomar as leituras de velocidade a cada 2 segundos ou até mesmo a cada segundo.

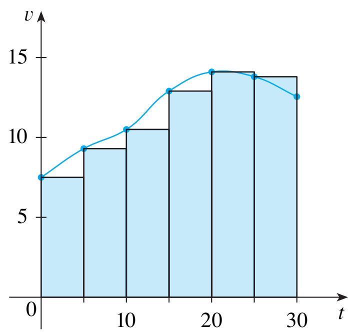


FIGURA 17

Talvez os cálculos no Exemplo 4 o façam lembrar-se das somas usadas anteriormente para estimar as áreas. A similaridade tem explicação quando esboçamos um gráfico da função velocidade do carro na Figura 17 e traçamos os retângulos cujas alturas são as velocidades iniciais para cada intervalo de tempo. A área do primeiro retângulo é $7{,}5 \times 5 = 37{,}5$, que é também a nossa estimativa para a distância percorrida nos primeiros cinco segundos. De fato, a área de cada retângulo pode ser interpretada como uma distância, pois a altura representa a velocidade, a largura e o tempo. A soma das áreas dos retângulos na Figura 17 é $L_6 = 342$, que é nossa estimativa inicial para a distância total percorrida.

Em geral, suponha que o objeto se mova com velocidade $v = f(t)$, em que $a \leqslant t \leqslant b$ e $f(t) \geqslant 0$ (logo, o objeto move-se sempre no sentido positivo). Vamos registrar as velocidades nos instantes $t_0 \,(= a), t_1, t_2, \ldots, t_n \,(= b)$, de forma que a velocidade seja aproximadamente constante em cada subintervalo. Se esses tempos forem igualmente espaçados, então entre duas leituras consecutivas temos o período de tempo $\Delta t = (b - a)/n$. Durante o primeiro intervalo de tempo a velocidade é aproximadamente $f(t_0)$ e, portanto, a distância percorrida é de aproximadamente $f(t_0)\,\Delta t$. Analogamente, a distância percorrida durante o segundo intervalo de tempo é de cerca de $f(t_1)\,\Delta t$ e a distância total percorrida durante o intervalo de tempo $[a, b]$ é de aproximadamente

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t.$$

Se usarmos as velocidades nas extremidades direitas em vez de nas extremidades esquerdas, nossa estimativa para a distância total ficará

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, mais precisa será nossa estimativa, então parece plausível que a distância *exata* d percorrida é o *limite* de tais expressões:

$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Veremos na Seção 5.4 que isso é realmente verdadeiro.

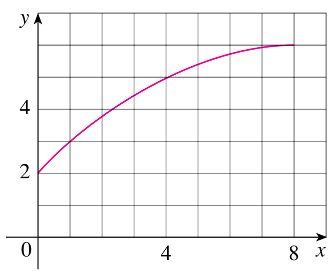
Como a Equação 5 tem a mesma forma que nossas expressões para a área nas Equações 2 e 3, segue que a distância percorrida é igual à área sob o gráfico da função velocidade. No Capítulo 6 veremos que outras quantidades de interesse nas ciências naturais e sociais — tais como o trabalho realizado por uma força variável ou a saída de sangue do coração — podem também ser interpretadas como a área sob uma curva. Logo, ao calcular áreas neste capítulo, tenha em mente que elas podem ser interpretadas de várias formas práticas.

5.1 Exercícios

Revisar

1. (a) Lendo os valores do gráfico dado de f, utilize quatro retângulos para encontrar as estimativas inferior e superior para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 8$. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar.

(b) Encontre novas estimativas, usando oito retângulos em cada caso.



2. (a) Use seis retângulos para achar estimativas de cada tipo para a área sob o gráfico dado de f de $x = 0$ até $x = 12$.

(i) L_6 (pontos amostrais são extremidades esquerdas)

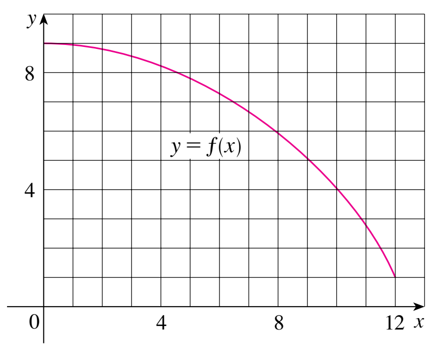
(ii) R_6 (pontos amostrais são extremidades direitas)

(iii) M_6 (pontos amostrais são pontos médios)

(b) L_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?

(c) R_6 é uma subestimativa ou superestimativa em relação à área verdadeira?

(d) Entre os números L_6, R_6 ou M_6, qual fornece a melhor estimativa? Explique.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Revisar **3.** (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = \cos x$ de $x = 0$ até $x = \pi/2$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

4. (a) Estime a área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ de $x = 0$ até $x = 4$ usando quatro retângulos aproximantes e extremidades direitas. Esboce o gráfico e os retângulos. Sua estimativa é uma subestimativa ou uma superestimativa?
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.

Revisar **5.** (a) Estime a área sob o gráfico $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ até $x = 2$ usando três retângulos aproximantes e extremidades direitas. Então, aperfeiçoe sua estimativa utilizando seis retângulos aproximantes. Esboce a curva e os retângulos aproximantes.
(b) Repita a parte (a) usando extremidades esquerdas.
(c) Repita a parte (a) empregando os pontos médios.
(d) A partir de seus esboços das partes (a), (b) e (c), qual parece ser a melhor estimativa?

6. (a) Faça o gráfico da função

$$f(x) = x - 2 \ln x, \; 1 \leqslant x \leqslant 5$$

(b) Estime a área sob o gráfico de f usando quatro retângulos aproximantes e tomando como pontos amostrais (i) as extremidades direitas e (ii) os pontos médios. Em cada caso, esboce a curva e os retângulos.
(c) Aperfeiçoe suas estimativas da parte (b) usando oito retângulos.

Revisar **7.** Avalie as somas superiores e inferiores para $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, com $n = 2$, 4, e 8. Ilustre com diagramas como na Figura 14.

8. Avalie as somas superiores e inferiores para $f(x) = 1 + x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, com $n = 3$ e 4. Ilustre com diagramas como na Figura 14.

9–10 Com uma calculadora programável (ou um computador), é possível calcular as expressões para a soma das áreas de retângulos aproximantes, mesmo para valores grandes de n, usando *laços*. (Numa TI use o comando Is > ou um laço For-EndFor, numa Casio use Isz, numa HP ou no BASIC use um laço FOR-NEXT.) Calcule a soma das áreas dos retângulos aproximantes usando subintervalos iguais e extremidades direitas para $n = 10, 30, 50$ e 100. Então, conjecture o valor exato da área.

9. A região sob $y = x^4$ de 0 até 1.

10. A região sob $y = \cos x$ de 0 até $\pi/2$.

SCA **11.** Alguns sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam retângulos aproximantes e calculam as somas de suas áreas, pelo menos se x_i^* for uma extremidade esquerda ou direita. (Por exemplo, no Maple use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum` e `rightsum`.)
(a) Se $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encontre as somas esquerda e direita para $n = 10$, 30 e 50.
(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).
(c) Mostre que a área exata sob f está entre 0,780 e 0,791.

SCA **12.** (a) Se $f(x) = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, use os comandos discutidos no Exercício 11 para encontrar as somas esquerda e direita para $n = 10$, 30 e 50.
(b) Ilustre fazendo o gráfico dos retângulos da parte (a).
(c) Mostre que a área exata sob f está entre 2,50 e 2,59.

Revisar **13.** A velocidade de um corredor aumenta regularmente durante os três primeiros segundos de uma corrida. Sua velocidade em intervalos de meio segundo é dada em uma tabela. Encontre as estimativas superior e inferior para a distância que ele percorreu durante esses três segundos.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (m/s)	0	1,9	3,3	4,5	5,5	5,9	6,2

14. A leitura do velocímetro de uma motocicleta em intervalos de 12 segundos é mostrada na tabela a seguir.
(a) Estime a distância percorrida pela motocicleta durante esse período, usando a velocidade no começo dos intervalos de tempo.
(b) Dê outra estimativa utilizando a velocidade no fim dos intervalos de tempo.
(c) As estimativas feitas nas partes (a) e (b) são estimativas superior e inferior? Explique.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (m/s)	9,1	8,5	7,6	6,7	7,3	8,2

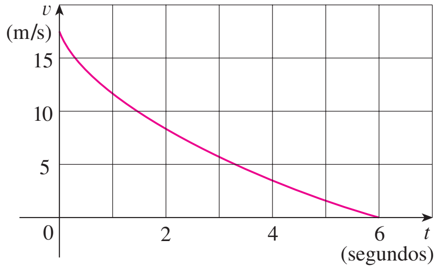
Revisar **15.** Óleo vaza de um tanque a uma taxa de $r(t)$ litros por hora. A taxa decresce à medida que o tempo passa e os valores da taxa em intervalos de duas horas são mostrados na tabela a seguir. Encontre estimativas superior e inferior para a quantidade total de óleo que vazou.

t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (L/h)	8,7	7,6	6,8	6,2	5,7	5,3

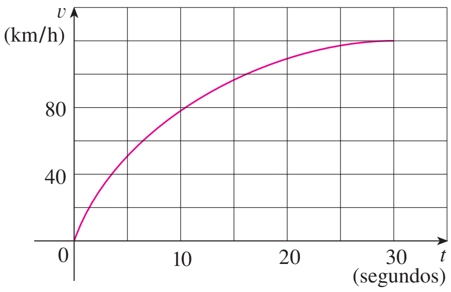
16. Quando estimamos distâncias a partir dos dados da velocidade, algumas vezes é necessário usar tempos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ que não estão igualmente espaçados. Podemos ainda estimar as distâncias usando os períodos de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por exemplo, em 7 de maio de 1992, o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo propósito era instalar o satélite de comunicação Intelsat. A tabela, fornecida pela Nasa, mostra os dados da velocidade do ônibus entre o lançamento e a entrada em funcionamento dos foguetes auxiliares. Use estes dados para estimar a altura acima da superfície da Terra do *Endeavour* 62 segundos depois do lançamento.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56
Fim da manobra de inclinação	15	97
Regulador de combustível a 89%	20	136
Regulador de combustível a 67%	32	226
Regulador de pressão a 104%	59	404
Pressão dinâmica máxima	62	440
Separação dos foguetes auxiliares	125	1.265

Revisar **17.** O gráfico da velocidade de um carro freando é mostrado. Use-o para estimar a distância percorrida pelo carro enquanto os freios estão sendo aplicados.



18. O gráfico da velocidade de um carro em aceleração a partir do repouso até uma velocidade de 120 km/h em um período de 30 segundos é mostrado. Estime a distância percorrida durante esse período.



19–21 Use a Definição 2 para achar uma expressão para a área sob o gráfico de f como um limite. Não calcule o limite.

Revisar **19.** $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

20. $f(x) = x^2 + \sqrt{1 + 2x}, \quad 4 \leqslant x \leqslant 7$

21. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

22–23 Determine uma região cuja área seja igual ao limite dado. Não calcule o limite.

22. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$

23. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \operatorname{tg} \frac{i\pi}{4n}$

24. (a) Utilize a Definição 2 para encontrar uma expressão para a área sob a curva $y = x^3$ de 0 a 1 como um limite.

(b) A fórmula a seguir para a soma dos cubos dos primeiros n inteiros está demonstrada no Apêndice E. Use-a para calcular o limite da parte (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

25. Seja A a área sob o gráfico de uma função contínua crescente f de a até b, e sejam L_n e R_n as aproximações para A com n subintervalos usando extremidades esquerdas e direitas, respectivamente.

(a) Como A, L_n e R_n estão relacionados?

(b) Mostre que

$$R_n - L_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

Então, desenhe um diagrama para ilustrar essa equação, mostrando que n retângulos representando $R_n - L_n$ podem ser reunidos num único retângulo cuja área é o lado direito da equação.

(c) Deduza que

$$R_n - A < \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

26. Se A é a área sob a curva $y = e^x$ de 1 a 3, use o Exercício 25 para encontrar um valor de n tal que $R_n - A < 0{,}0001$.

SCA **27.** (a) Expresse a área sob a curva $y = x^5$ de 0 até 2 como um limite.

(b) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a soma em sua expressão da parte (a).

(c) Calcule o limite da parte (a).

SCA **28.** Encontre a área exata da região sob o gráfico de $y = e^{-x}$ de 0 até 2 usando um sistema de computação algébrica para calcular a soma e então o limite no Exemplo 3(a). Compare sua resposta com a estimativa obtida no Exemplo 3(b).

SCA **29.** Encontre a área exata sob a curva cosseno $y = \cos x$ de $x = 0$ até $x = b$, onde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use um sistema de computação algébrica para calcular a soma e o limite.) Em particular, qual é a área, se $b = \pi/2$?

30. (a) Seja A_n a área de um polígono com n lados iguais inscrito num círculo com raio r. Dividindo o polígono em n triângulos congruentes com ângulo central de $2\pi/n$, mostre que

$$A_n = \tfrac{1}{2} n r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Dica:* Use a Equação 3.3.2.]