

Funções de uma variável – FUV 1

Limite e Continuidade

O Problema da Tangente

- A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa “tocando.” Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Em outros termos, uma reta tangente deve ter a mesma direção que a curva no ponto de contato.
- Para um círculo, poderíamos simplesmente dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a Figura 1(a).

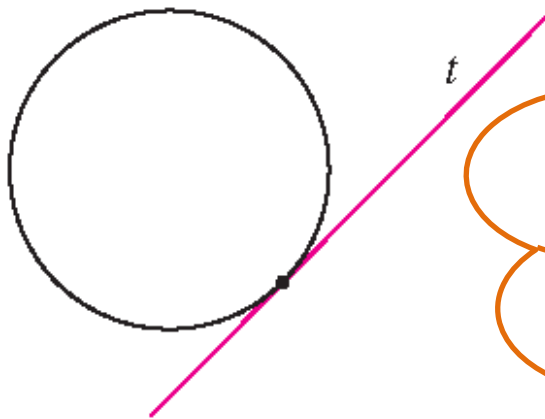


Figura 1(a)

Para as curvas mais complicadas essa definição é inadequada (Figura 1(b)).

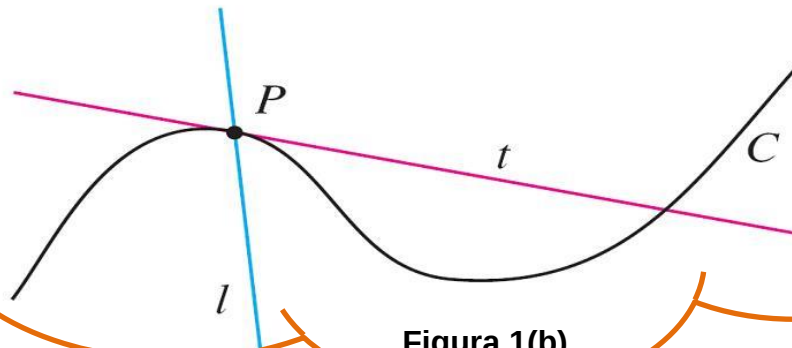
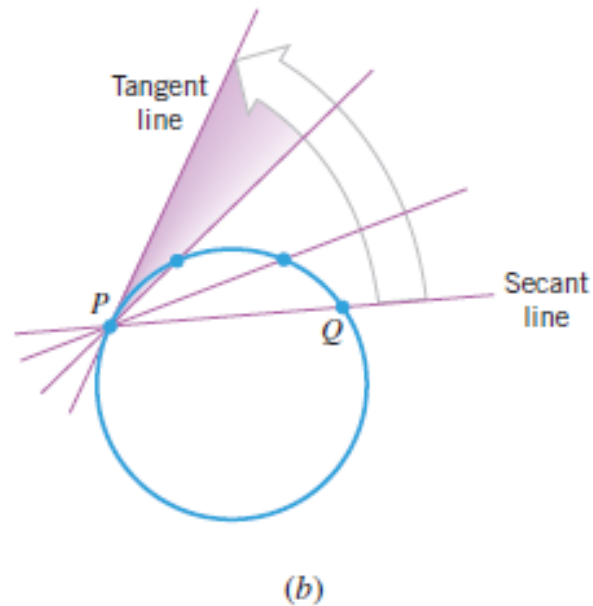
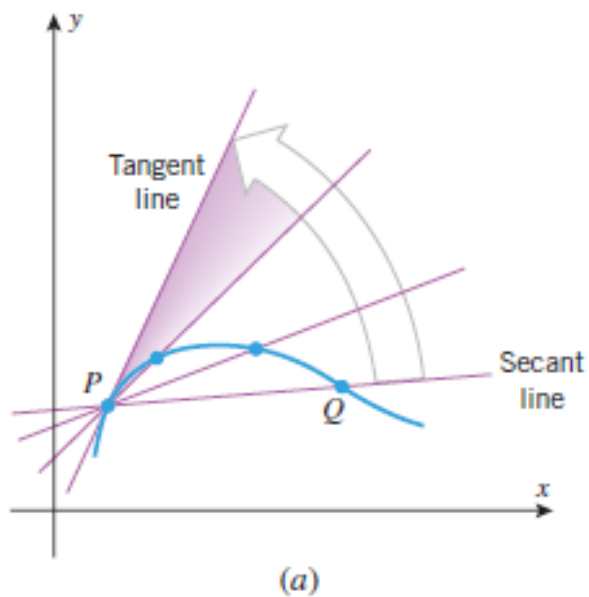


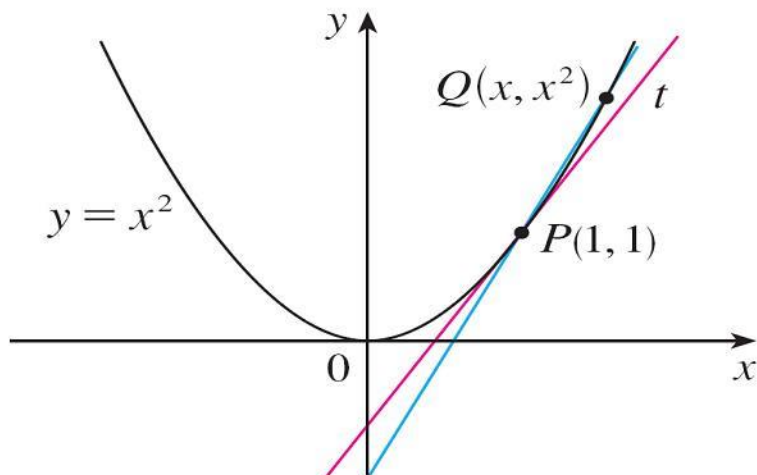
Figura 1(b)

O Problema da Tangente



Exemplo 1

- Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.



Para encontrar a equação da reta precisamos da inclinação $\Rightarrow$ necessário dois pares ordenados para determinar!!!

Observe, porém, que podemos calcular uma aproximação de m escolhendo um ponto próximo $Q(x, x^2)$ sobre a parábola (reta azul) e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ . [Uma **reta secante**, do latim *secans*, significando corte, é uma linha que corta (intersecta) uma curva mais de uma vez.]

Exemplo 1 – continuação

As tabelas mostram os valores de m_{PQ} para vários valores de x próximos a 1.

x	m_{PQ}	x	m_{PQ}
2	3	0	1
1,5	2,5	0,5	1,5
1,1	2,1	0,9	1,9
1,01	2,01	0,99	1,99
1,001	2,001	0,999	1,999

Quanto mais próximo Q estiver de P , mais próximo x estará de 1 e, e a tabela indica que m_{PQ} estará próximo de 2. Isso sugere que a inclinação da reta tangente t deve ser $m = 2$.

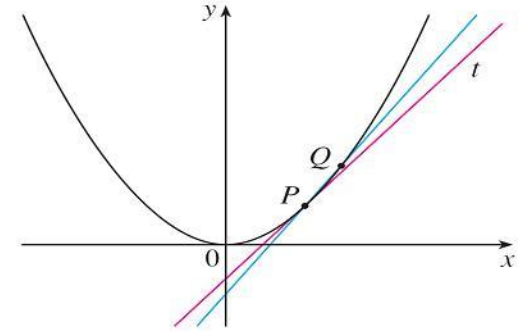
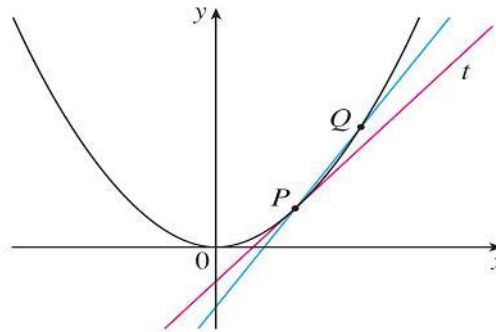
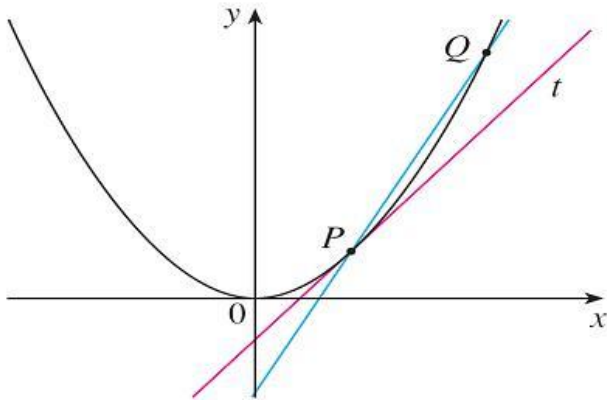
$$\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

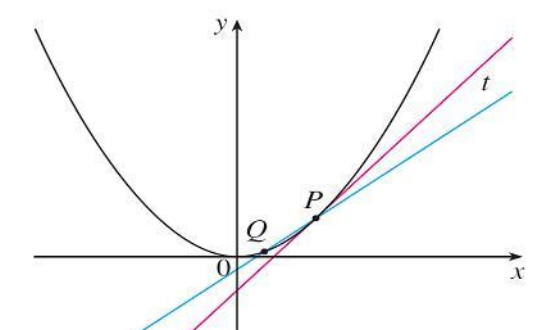
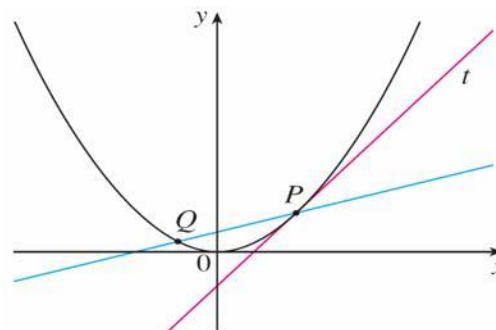
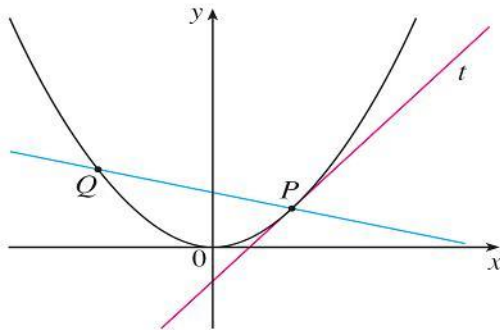
Usando a forma ponto-inclinação da equação de uma reta para escrever a equação da tangente $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = 2(x - 1) \longrightarrow y = 2x - 1$$

Exemplo 1 – continuação



Q se aproxima de P pela direita



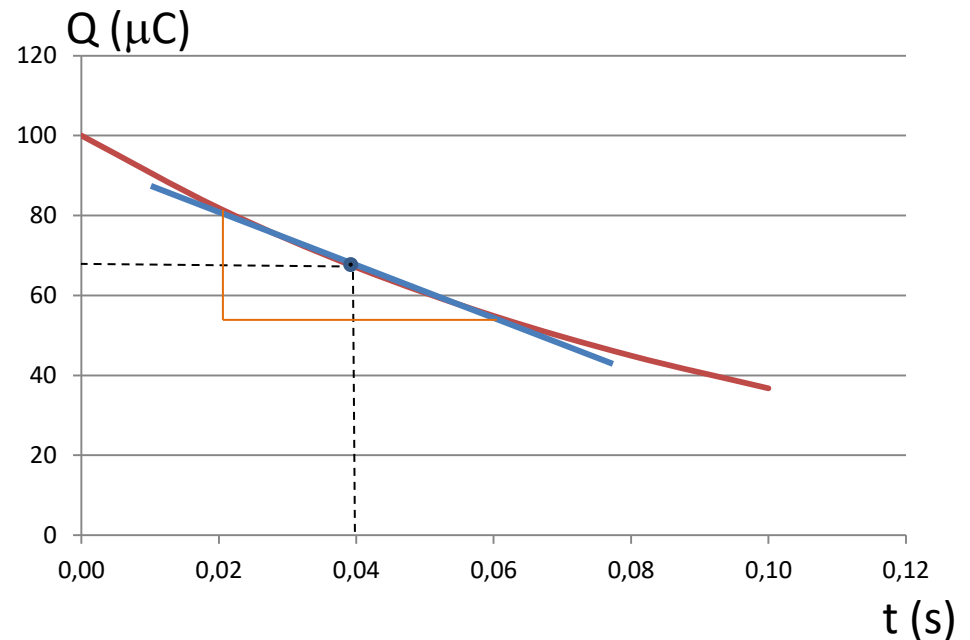
Q se aproxima de P pela esquerda

À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t .

Exemplo 2

O flash de uma câmera opera armazenando carga em um capacitor e liberando-a instantaneamente ao ser disparado. Os dados da tabela descrevem a carga Q armazenada no capacitor (em microcoulombs) no instante t (medido em segundos após o flash ser disparado). Use os dados para esboçar o gráfico e estimar a inclinação da reta tangente no ponto $t=0,04$

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76



Exemplo 3

Suponha que uma bola é solta a partir do ponto de observação no alto da Torre CN, em Toronto, 450 m acima do solo. Encontre a velocidade da bola após 5 segundos.

Se a distância percorrida após t segundos for chamada $s(t)$ e medida em metros, então temos

$$s(t) = 4,9t^2$$

A dificuldade em encontrar a velocidade após 5 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 5$), ou seja, não temos um intervalo de tempo.

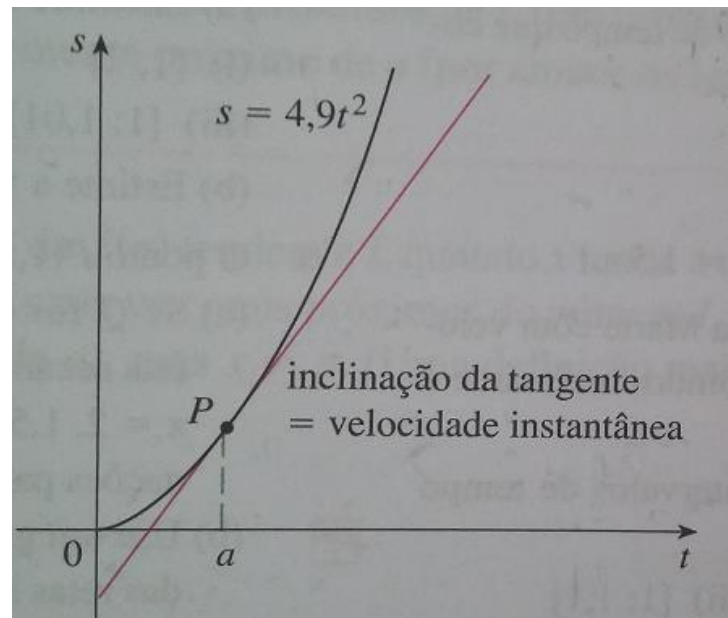
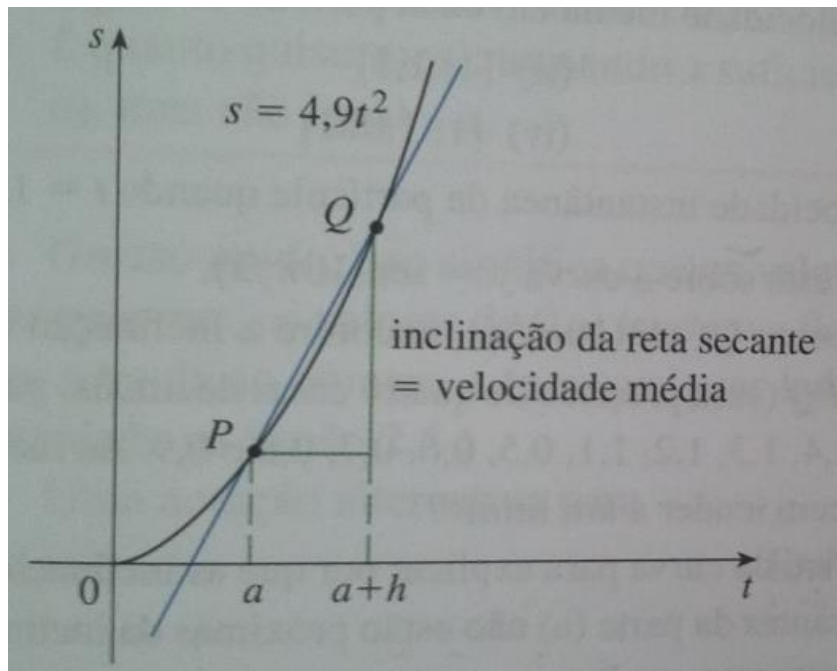
Porém, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre o breve intervalo de tempo de um décimo de segundo, a partir de $t = 5$ até $t = 5,1$

$$\begin{aligned}\text{velocidade média} &= \frac{\text{mudança de posição}}{\text{tempo decorrido}} \\ &= \frac{s(5,1) - s(5)}{0,1} \\ &= \frac{4,9(5,1)^2 - 4,9(5)^2}{0,1} = 49.49 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – continuação

A tabela a seguir mostra os resultados de cálculos similares da velocidade média em períodos de tempo cada vez menores

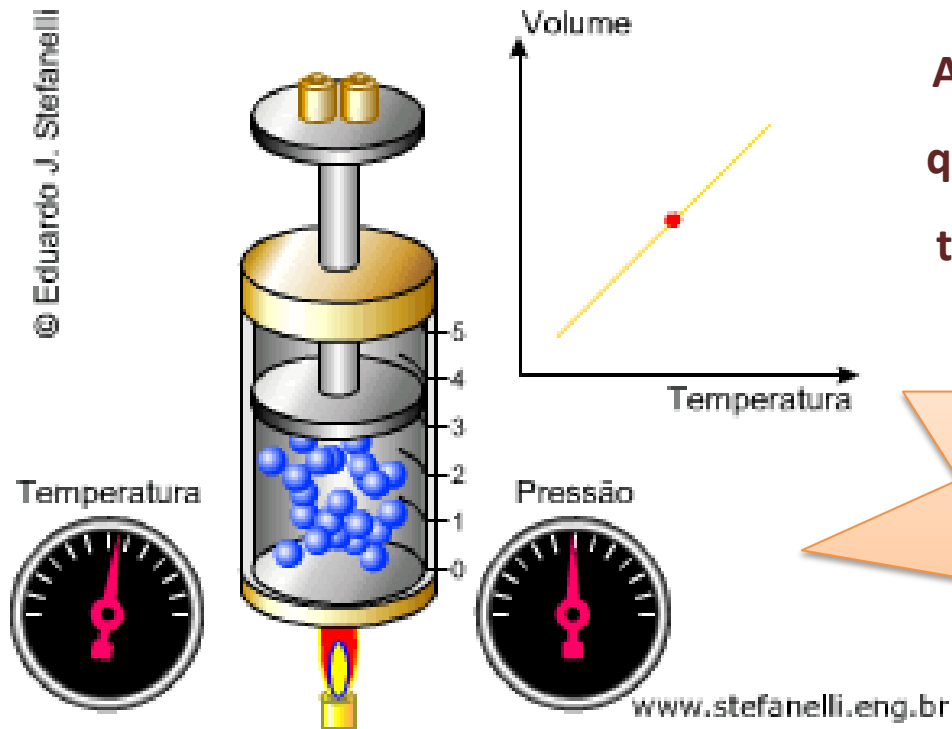
Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5,1$	49,49
$5 \leq t \leq 5,05$	49,245
$5 \leq t \leq 5,01$	49,049
$5 \leq t \leq 5,001$	49,0049



O Limite

Aplicações Fenomenológicas : Lei de Gay-Lussac

“Em condições de massa e pressão (baixa) constantes, a variação do volume com a temperatura em graus Celsius é linear” **Lei de Charles**



Admitindo a validade dessa linearidade ,
quando o volume for igual a zero ($V=0$), a
temperatura corresponderá a $-273,16\text{ }^{\circ}\text{C}$

**Como uma gás
pode desaparecer
em condições de
resfriamento???**



O Limite

Podemos resolver essa impossibilidade física – “quando o volume de um gás tender a zero ($V \rightarrow 0$), a temperatura tenderá a $-273,16^\circ\text{C}$ ($\theta \rightarrow -273,16^\circ\text{C}$)”.

Matematicamente:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \theta = -273,16^\circ\text{C}$$

m, P, ctes

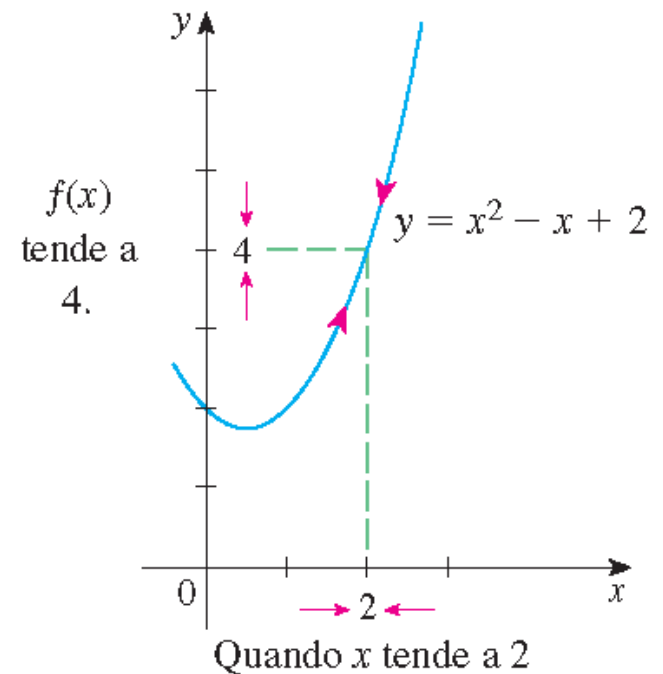
Noção intuitiva de limite

Sucessões numéricas		Dizemos que:
1, 2, 3, 4, 5,	Os termos tornam-se cada vez maiores, sem atingir um limite	$x \rightarrow +\infty$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$	Os números aproximam-se cada vez mais de 1, sem nunca atingir esse valor	$x \rightarrow 1$
1, 0, -1, -2, -3, ...	Os termos tornam-se cada vez menores, sem atingir um limite	$x \rightarrow -\infty$
$1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{6}{7}, 7, \dots$	Os termos oscilam sem tender a um limite	

Exemplo 4

Vamos analisar o comportamento da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001



$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

O Limite - definição

1 Definição Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a .) Então escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ”

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a .

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{quando} \quad x \rightarrow a$$

Observe na frase de definição de limite que “ $x \neq a$ ”. Isso significa que ao procurar o limite de $f(x)$ quando x tende a a , nunca consideramos $x = a$. Na verdade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida quando $x = a$. A única coisa que importa é como f está definida *próximo de* a .

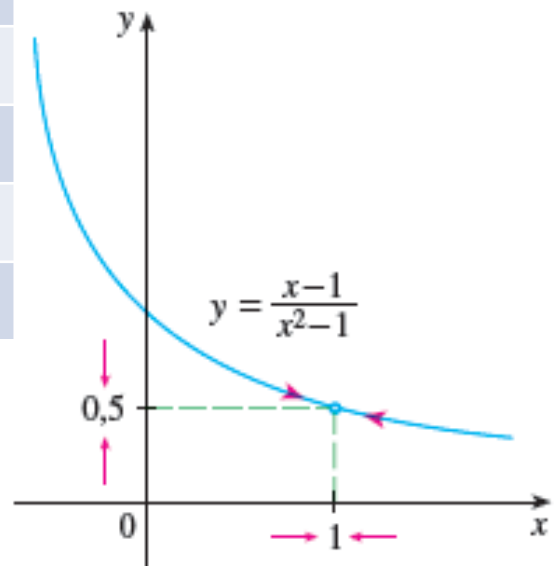
Exemplo 5

Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

Note que a função não está definida quando $x=1$.

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0,5	0,666667	1,5	0,400000
0,9	0,526316	1,1	0,476190
0,99	0,502513	1,01	0,497512
0,999	0,500250	1,001	0,499750
0,9999	0,500025	1,0001	0,499975

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5.$$



Exemplo 6

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

???? A quantidade $0/0$ não pode ser associada, de forma absoluta, a nenhum número. $0/0$ é uma **quantidade indeterminada** e é chamada de **símbolo de indeterminação**

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ e 1^∞ **símbolos de indeterminação**

0^∞ ??? Qualquer número MENOR QUE 1 elevado a infinito dá zero, logo: $0^\infty = 0$.

Exemplo 6 - continuação

Na verdade o limite existe !! No exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

O limite existe – Mas não significa que $0/0=2$. $0/0$ é uma quantidade indeterminada, não é igual a nada. O limite de uma outra função, dando o mesmo símbolo de indeterminação pode ser igual a outro valor.

Exemplo 7

a)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = 12$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{8x^2 + 5x + 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{8x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{8x^2} = \frac{3}{8}$$

Quando $x \rightarrow \infty$ os termos quadráticos divergem muito mais rapidamente que os demais termos do numerador e denominador

O Limite - importante

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)^x = 1^\infty$$

Lembretes

1. Relação Binomial

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Lembretes – continuação

2.Produto Notável para resolver algumas indeterminações envolvendo raízes ou fatores do tipo " $x^n - a^n$ "

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ temos :

$$a^n - b^n = (a - b) \left(a^{\binom{n-1}{1}} + a^{\binom{n-2}{1}} b + \dots + a^{\binom{n-k}{1}} b^{\binom{k-1}{1}} + \dots + a b^{\binom{n-2}{1}} + b^{\binom{n-1}{1}} \right).$$

Assim,

$$\spadesuit \ n=2, \ a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$\spadesuit \ n=3, \ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

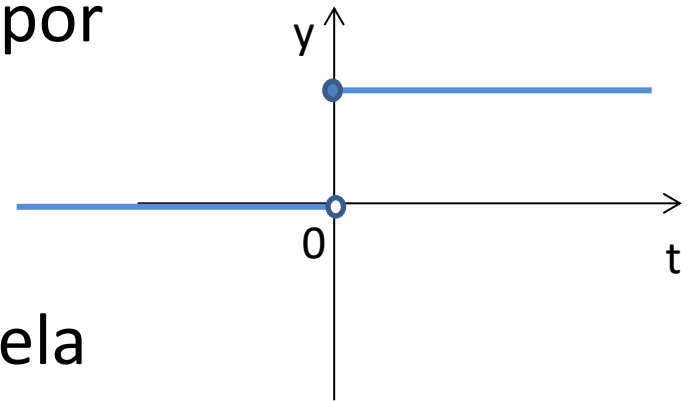
$$\spadesuit \ n=4, \ a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3).$$

$$\spadesuit \ n=5, \ a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4).$$

Limites Laterais

- A função de Heaviside H , é definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



- $H(t)$ tende a 0 quando t tende a 0 pela esquerda, e $H(t)$ tende a 1 quando t tende a 0 pela direita. Indicamos essa situação simbolicamente escrevendo.

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 1$$

O símbolo “ $t \rightarrow 0^-$ ” indica que estamos considerando somente valores de t menores que 0.

Da mesma forma, “ $t \rightarrow 0^+$ ” indica que estamos considerando somente valores de t maiores que 0.

Limites Laterais

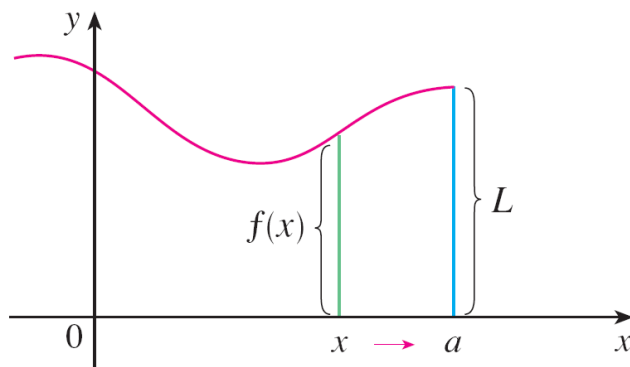
2 Definição Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

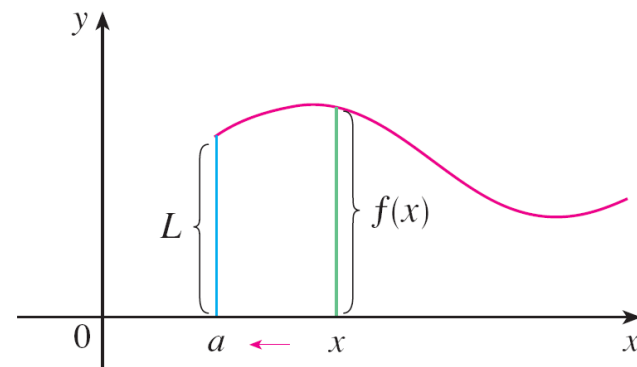
e dizemos que o **limite à esquerda** de $f(x)$ quando x tende a a [ou o **limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , para x suficientemente próximo de a e x menor que a .

De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a , obtemos “o **limite a direita de $f(x)$ quando x tende a a** e é igual a L ” e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$



(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

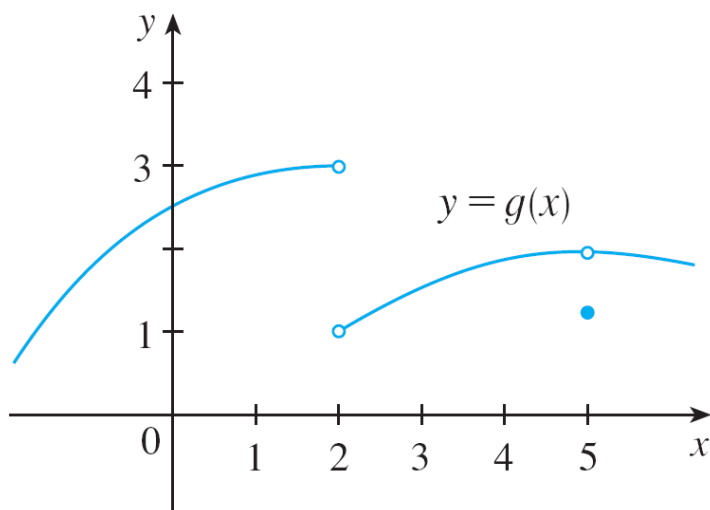
Limites Laterais

Comparando a Definição 1 com as definições de limites laterais, vemos ser verdadeiro o que segue.

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Exemplo 8

O gráfico de uma função g é apresentado.



Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

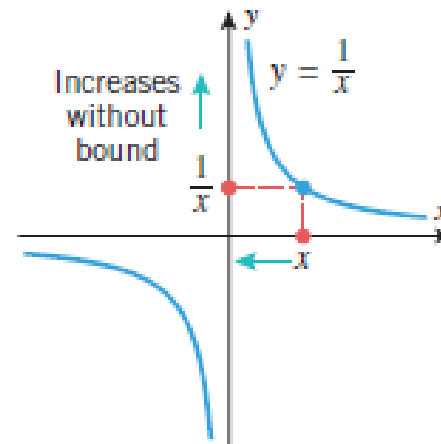
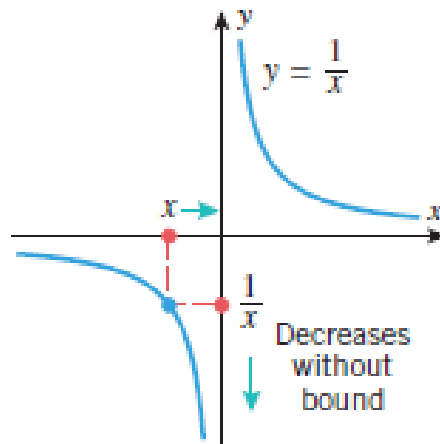
- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
- d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x)$
- f) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$

Limites Infinitos

Vamos considerar o comportamento de $f(x) = 1/x$ para valores de $x \approx 0$. Vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1	1
$\frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1000	-10,000		10,000	1000	100	10	1

Left side

Right side

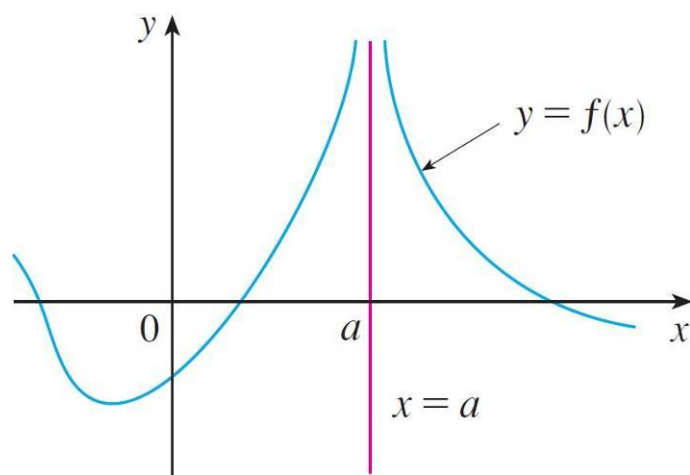
Limites Infinitos

4 Definição Seja f uma função definida em ambos os lados de a , exceto possivelmente no próprio a . Então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tornando x suficientemente próximo de a , mas não igual a a .

Ou seja, se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ and $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

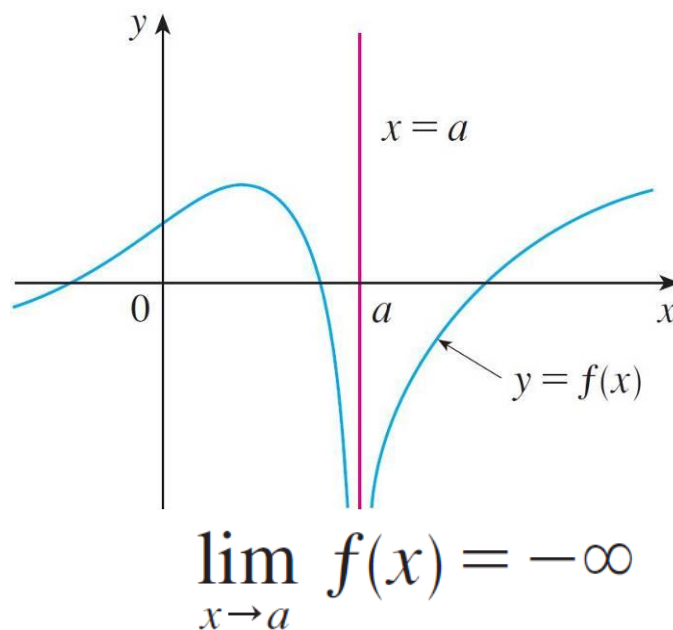
Limites Infinitos

5 Definição Seja f definida em ambos os lados de a , exceto possivelmente no próprio a . Então

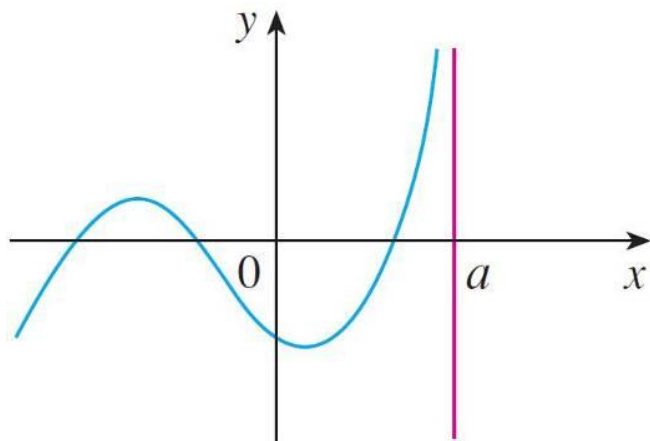
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, ao tornarmos x suficientemente próximo de a , mas não igual a a .

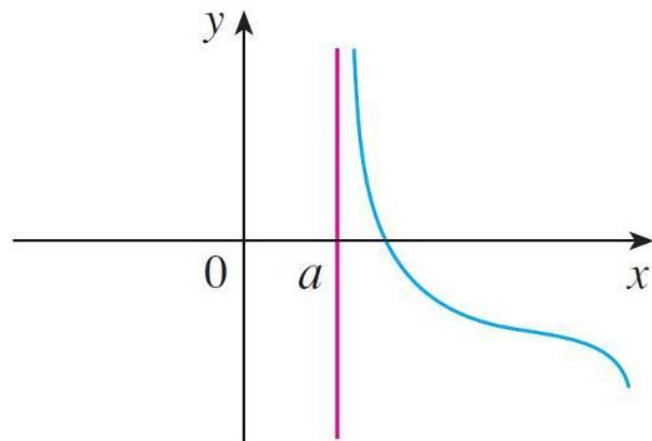
Ou seja, se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ and $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$



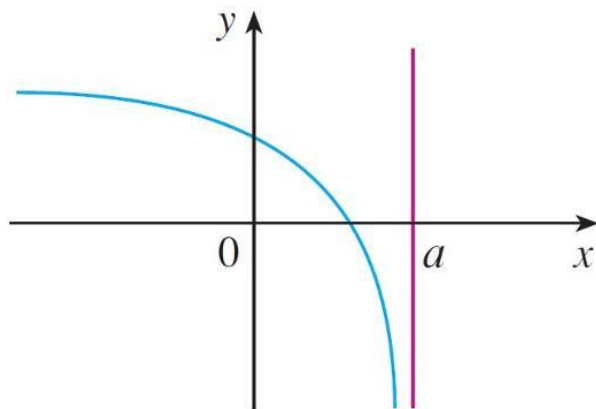
Limites Infinitos



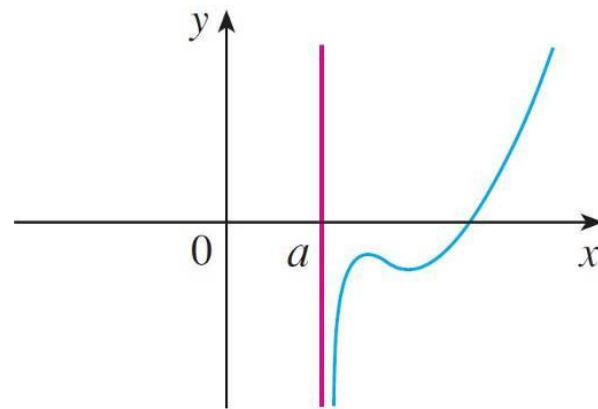
$$(a) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$



$$(b) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$



$$(c) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$(d) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Limites Infinitos

6 Definição A reta $x = a$ é chamada **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

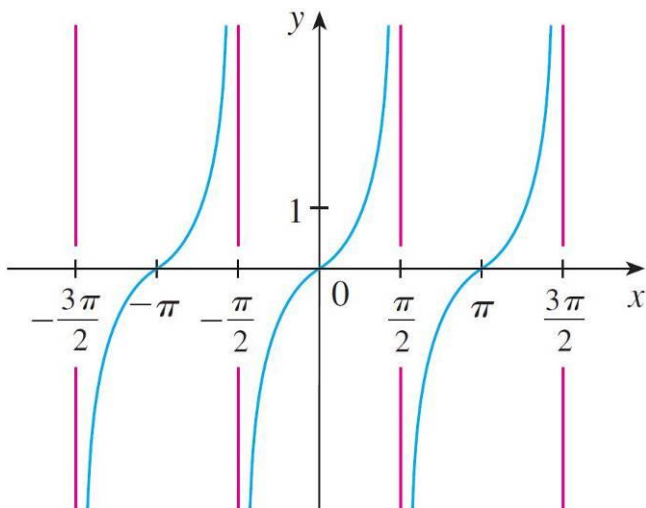
Exemplo 9 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \tan x$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad n \text{ inteiro} \quad \text{São todas assíntotas verticais de } f(x) = \tan x$$



Cálculos Usando Proriedades dos Limites

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existam, então

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Cálculos Usando Proriedades dos Limites

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \quad \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$9. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo}$$

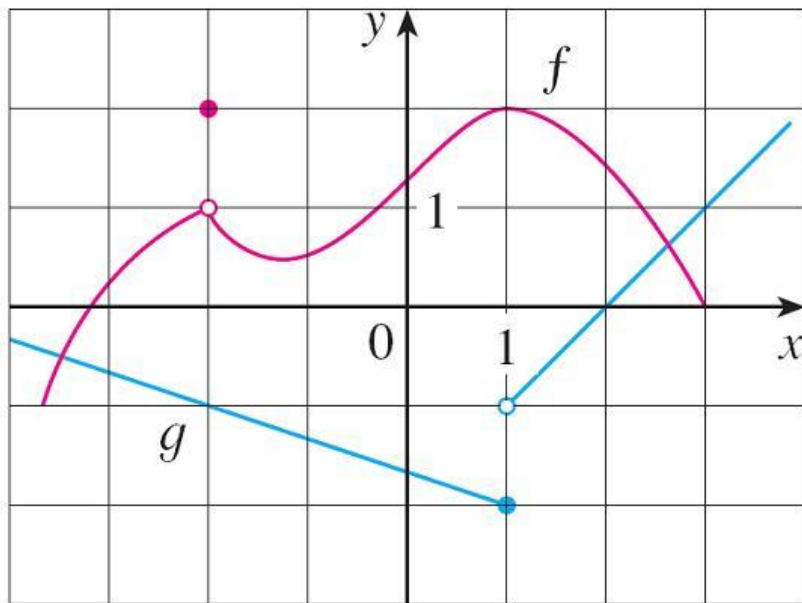
(Se n for par, supomos que $a > 0$.)

$$11. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo}$$

[Se n for par, supomos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$.]

Exemplo 10

Use as Propriedades dos Limites e os gráficos de f e g na figura abaixo para calcular os seguintes limites, se eles existirem



(a) $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + 5g(x)]$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemplo 11

Usando as propriedades dos limites encontre:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 3).$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 + 4}{x - 3}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 2)}$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 2)}$

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - x}{(x - 4)(x + 2)}$

d) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(t^2 + 9)} - 3}{t^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x + 8}{x^2 + x - 12}$

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25}$

A Definição Precisa de um Limite

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $|f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L , e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de limite pode ser expressa em palavras da seguinte forma:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que a distância entre $f(x)$ e L fica arbitrariamente pequena tomando-se a distância de x a a suficientemente pequena (mas não igual a 0).

Alternativamente, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que os valores de $f(x)$ podem ser tornados tão próximos de L quanto desejarmos, tornando-se x suficientemente próximo de a (mas não igual a a).

Continuidade

O limite de uma função quando x tende a a pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando o valor da função em a . Funções com essa propriedade são chamadas de *contínuas em a* .

1 Definição Uma função f é **contínua em um número a** se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

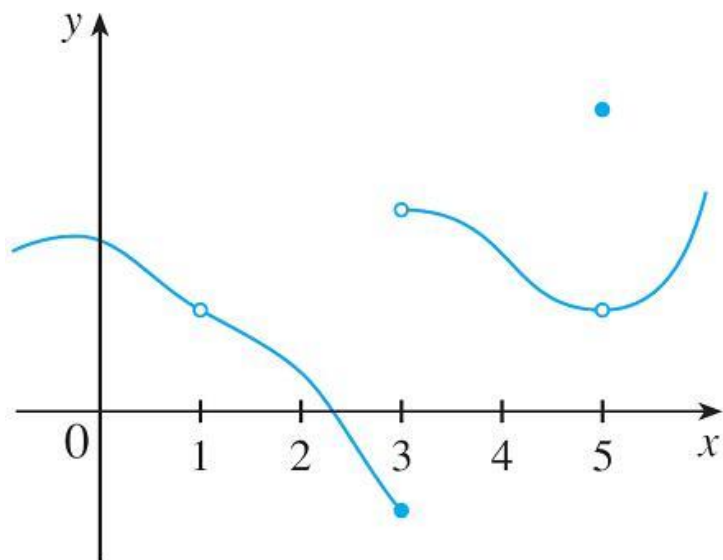
Observe que a Definição 1 implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a :

- 1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
- 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
- 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tende a $f(a)$ quando x tende a a . Assim, uma função contínua f tem a propriedade que uma pequena mudança em x produz somente uma pequena alteração em $f(x)$.

Exemplo 12

A Figura mostra o gráfico da função f . Em quais números f é descontínua? Por quê?



Em $a = 1$ pois $f(1)$ não está definida.

Em $a = 3$. Aqui, $f(3)$ está definida, mas $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe (pois os limites esquerdo e direito são diferentes). Logo f é descontínua em 3.

Em $a=5$. Aqui, $f(5)$ está definida e $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ existe (pois o limite esquerdo e o direito são iguais), porém $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$

Continuidade

2 Definição Uma função f é **contínua à direita** em um número a se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

e f é **contínua à esquerda** em a se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

4 Teorema Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a :

1. $f + g$

2. $f - g$

3. cf

4. fg

5. $\frac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

Continuidade

5 Teorema

- (a) Qualquer polinômio é contínuo em toda a parte; ou seja, é contínuo em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
- (b) Qualquer função racional é contínua sempre que estiver definida; ou seja, é contínua em seu domínio.

7 Teorema Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios:

polinômios

funções racionais

funções raízes

funções trigonométricas

funções trigonométricas inversas

funções exponenciais

funções logarítmicas

Exemplo 13

a) Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1,1]$.

b) Encontre $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

c) Onde a função $f(x) = \frac{\ln x + t g^{-1} x}{x^2 - 1}$ é contínua?