. Demonstre que $\frac{d}{dx}$ (cossec x) = −cossec x cotg x.

. Demonstre que $\frac{d}{dx}$ (sec x) = sec x tg x .

. Demonstre que $\frac{d}{dx}$ (cotg x) = −cossec²x.

1–16 Derive.

1. $f(x) = x - 3\,\text{sen}\,x$

2. $f(x) = x\,\text{sen}\,x$

3. $y = \text{sen}\,x + 10\,\text{tg}\,x$

4. $y = 2\,\text{cossec}\,x + 5\cos x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4\sec t + \text{tg}\,t$

7. $h(\theta) = \text{cossec}\,\theta + e^\theta\,\text{cotg}\,\theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \text{tg}\,x}$

10. $y = \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{x + \cos x}$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\text{tg}\,x}$

13. $y = \dfrac{\text{sen}\,x}{x^2}$

14. $y = \text{cossec}\,\theta\,(\theta + \text{cotg}\,\theta)$

15. $f(x) = xe^x\,\text{cossec}\,x$

16. $y = x^2\,\text{sen}\,x\,\text{tg}\,x$

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

21. $y = \sec x$, $(\pi/3, 2)$

22. $y = e^x \cos x$, $(0, 1)$

23. $y = x + \cos x$, $(0, 1)$

24. $y = \dfrac{1}{\text{sen}\,x + \cos x}$, $(0, 1)$

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8 \text{ sen } t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.

(a) Encontre a velocidade e aceleração no instante t.

(b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo no instante $t = 2\pi/3$. Em que sentido ele está se movendo nesse instante?

49. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

(a) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\sec x + \cos x = \dfrac{1 + \text{cotg } x}{\text{cossec } x}$

37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede, e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

1–6 Escreva a função composta na forma $f(g(x))$. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então, encontre a derivada dy/dx.

1. $y = \text{sen } 4x$

2. $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$

4. $y = \text{tg}(\text{sen } x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \text{sen}(e^x)$

7–46 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$

8. $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$

12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = 3\cot(n\theta)$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

22. $y = e^{-5x}\cos 3x$

23. $y = e^{x\cos x}$

24. $y = 10^{1 - x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{e^{2u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \operatorname{tg}(\cos x)$

30. $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y + 1}\right)^5$

31. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$

32. $y = \operatorname{tg}^2(3\theta)$

33. $y = \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x$

34. $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$

36. $F(z) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 + 4}}$

47–50 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função.

47. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

48. $y = xe^{cx}$

49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$

50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

51. $y = \dfrac{8}{\sqrt{4 + 3x}}$, $(4, 2)$

52. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$, $(\pi/6, 1)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

54. $y = x^2 e^{-x}$, $(1, 1/e)$

77. O deslocamento de uma partícula em uma corda vibrante é dado pela equação

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\,(10\pi t)$$

onde s é medido em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade da partícula após t segundos.

79. A Cefeu é uma constelação cujo brilho é variável. A estrela mais visível dessa constelação é a Delta Cefeu, para a qual o intervalo de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias. O brilho médio dessa estrela é de 4,0, com uma variação de $\pm 0{,}35$. Em vista desses dados, o brilho de Delta Cefeu no instante t, onde t é medido em dias, foi modelado pela função

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35\,\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{5{,}4}\right)$$

(a) Encontre a taxa de variação do brilho após t dias.

(b) Encontre, correta até duas casas decimais, a taxa de crescimento após 1 dia.

1–4

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes, substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encontre dy/dx derivando implicitamente.

5. $x^2 + y^3 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$ **8.** $x^2 - 2xy + y^3 = c$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **10.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x\,\text{sen}\,y = 4$ **12.** $1 + x = \text{sen}(xy^2)$

13. $4\cos x\,\text{sen}\,y = 1$ **14.** $y\,\text{sen}(x^2) = x\,\text{sen}(y^2)$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ **18.** $\text{tg}\,(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

19. $xy = \text{cotg}(xy)$ **20.** $\text{sen}\,x + \cos y = \text{sen}\,x\cos y$

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$

6. $f(x) = \log_5(xe^x)$

7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

8. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

9. $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$

10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t+1)^3}{(3t-1)^4}$

12. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

13. $g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$

14. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

15. $y = \dfrac{\ln x}{1 + x}$

16. $y = \ln(x^4 \operatorname{sen}^2 x)$

17. $y = \ln |2 - x - 5x^2|$

18. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

21. $y = 2x \log_{10} \sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

1–4 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

1. $f(x) = x^3, \quad a = 1$

2. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

3. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0,9}$ e $\sqrt{0,99}$. Ilustre fazendo os gráficos de f e da reta tangente.

11–14 Encontre a diferencial da função.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1 + t^2}$

12. (a) $y = s/(1 + 2s)$ (b) $y = e^{-u} \cos u$

13. (a) $y = \dfrac{u + 1}{u - 1}$ (b) $y = (1 + r^3)^{-2}$

14. (a) $y = e^{\operatorname{tg} \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15–18 (a) Encontre a diferencial dy e (b) calcule dy para os valores dados de x e dx.

15. $y = e^{x/10}$, $x = 0$, $dx = 0{,}1$

16. $y = 1/(x + 1)$, $x = 1$, $dx = -0{,}01$

17. $y = \operatorname{tg} x$, $x = \pi/4$, $dx = -0{,}1$

18. $y = \cos x$, $x = \pi/3$, $dx = 0{,}05$

19–22 Calcule Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. A seguir, esboce um diagrama como o da Figura 5, mostrando os segmentos de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

19. $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $\Delta x = -0{,}4$

20. $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 1$

21. $y = 2/x$, $x = 4$, $\Delta x = 1$

22. $y = e^x$, $x = 0$, $\Delta x = 0{,}5$

47–62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = 18x + 15x^2 - 4x^3, \quad [-3, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2, \quad [-3, 2]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

69. Entre 0 °C e 30 °C, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula

$$V = 999{,}87 - 0{,}06426T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

9. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x + 4/x$ na janela retangular $[0, 10]$ por $[0, 10]$.

(b) Faça o gráfico da reta secante que passa pelos pontos $(1, 5)$ e $(8, 8{,}5)$ na mesma tela que f.

(c) Encontre o número c que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para essa função f e o intervalo $[1, 8]$. Então, faça o gráfico da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ e observe que ela é paralela à reta secante.

10. (a) Na janela retangular $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, faça o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$ e de sua reta secante que passa pelos pontos $(-2, -4)$ e $(2, 4)$. Use o gráfico para estimar as coordenadas x dos pontos onde a reta tangente é paralela à reta secante.

(b) Encontre os valores exatos dos números c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[-2, 2]$ e compare com sua resposta da parte (a).

11–14 Verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

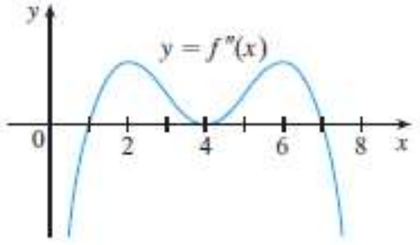
11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}, \quad [1, 4]$

7. O gráfico da segunda derivada f'' de uma função f está mostrado. Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Justifique sua resposta.

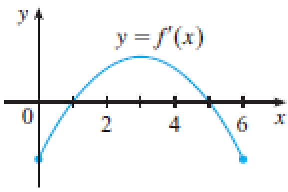


5–6 O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.

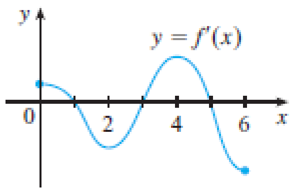
(a) Em que intervalos f está crescendo ou decrescendo?

(b) Em que valores de x a função f tem um máximo ou mínimo local?

5.



6.



9–18

(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.

(b) Encontre os valores máximo e mínimo local de f.

(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

9. $f(x) = x^3 - 12x + 1$

10. $f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando ambos os Testes das Primeira e Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

1–4 Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x \to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim_{x \to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x \to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x \to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x \to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–64 Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôspital quando for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de L'Hôspital não for aplicável, explique por quê.

5. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ **6.** $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

7. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$ **8.** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\displaystyle\lim_{x \to (\pi/2)^+} \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$ **10.** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$

17. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

18. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln \ln x}{x}$

19. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3}$

20. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

21. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

24. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$

25. $\lim_{t \to 0} \frac{5^t - 3^t}{t}$

26. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

28. $\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

6. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1 000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.

7. Um modelo usado para a produção Y de uma colheita agrícola como função do nível de nitrogênio N no solo (medido em unidades apropriadas) é

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

em que k é uma constante positiva. Que nível de nitrogênio dá a melhor produção?

9. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com 300 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?